This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

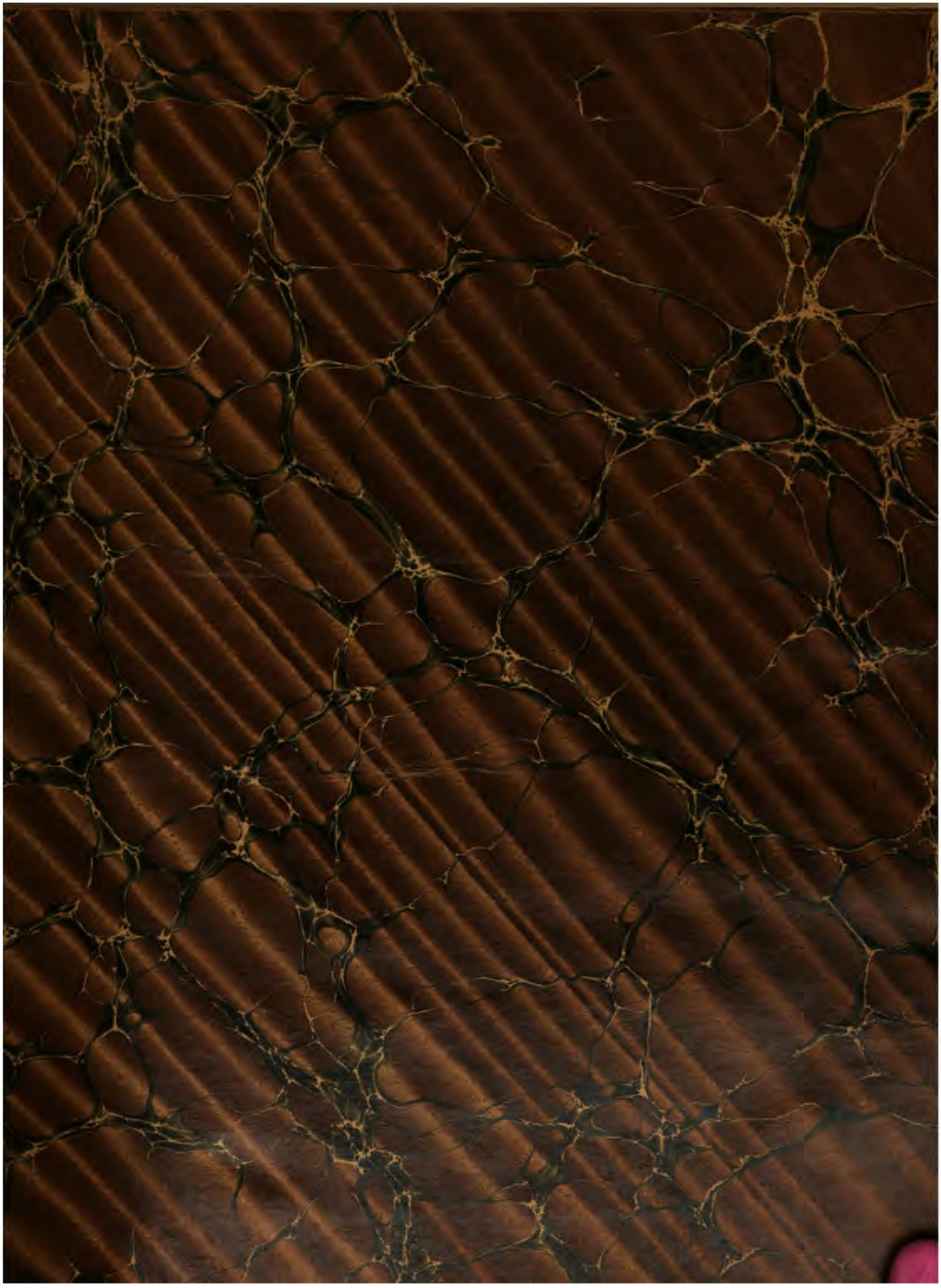
En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 1809.02

HARVARD COLLEGE

SCIENCE CENTER
LIBRARY

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY."



N° D'ORDRE :
1094.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. GASTON COMBEBIAC,

CAPITAINE DU GÉNIE.

1re THÈSE. — CALCUL DES TRIQUATERNIONS.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 22 Avril 1902 devant la Commission d'Examen.

MM. APPELL, *Président.*
POINCARÉ, KŒNIGS, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

N° D'ORDRE :

1094.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. GASTON COMBEBIAC,

CAPITAINE DU GÉNIE.

1re THÈSE. — CALCUL DES TRIQUATERNIONS.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 22 Avril 1902 devant la Commission d'Examen.

MM. APPELL, *Président.*

POINCARÉ, KŒNIGS, *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1902

Math 1809.02
HARVARD COLLEGE
FEB 20 1903
LIBRARY
Farrar fund

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX	Géométrie supérieure.
PROFESSEUR HONORAIRE	TROOST.	
PROFESSEURS	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	Yves DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS	Géologie.
	GIARD	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	WOLF	Astronomie physique.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN	Histologie.
	PELLAT	Physique.
	HALLER	Chimie organique.
	H. MOISSAN	Chimie.
	JOANNIS	Chimie (Ens^{nt} P.C.N.).
	P. JANET	Physique (Ens^{nt} P.C.N.).
	N.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS ADJOINTS	PUISEUX	Mécanique et Astronomie.
	RIBAN	Chimie analytique.
	RAFFY	Éléments d'Analyse et de Mécanique.
	LEDUC	Physique.
	HAUG	Géologie.
	HADAMARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	ANDOYER	Mécanique et Astronomie.
SECRÉTAIRE	FOUSSEREAU.	

A MON PÈRE.

PREMIÈRE THÈSE.

CALCUL DES TRIQUATERNIONS.

NOUVELLE ANALYSE GÉOMÉTRIQUE.

INTRODUCTION.

Objet du Mémoire. — L'objet de ce Mémoire est d'établir une analyse géométrique se passant de tout système de référence.

Les procédés exposés dans l'*Ausdehnungs-lehre* de Grassmann réaliseraient ce but, s'ils étaient susceptibles d'une réglementation absolument systématique, condition à laquelle ils ne satisfont pas, à notre avis.

Le calcul des quaternions, au contraire, constitue une analyse géométrique dans le vrai sens du mot. Il est susceptible de s'assimiler, en les simplifiant, toutes les méthodes de la géométrie analytique.

Il se passe d'axes de coordonnées, mais il a besoin d'une origine, ce qui laisse subsister encore dans les formules des éléments étrangers aux questions traitées, sauf toutefois dans les questions ressortant à la géométrie différentielle, où l'origine disparaît complètement et où l'appareil analytique atteint toute la simplicité possible.

C'est aux systèmes numériques complexes comprenant celui des quaternions que nous avons demandé la réalisation de notre but, et la solution nous a été fournie par le système numérique des triquaternions.

Il nous a paru utile, en raison du particularisme des calculs géométriques dans la Science mathématique, d'exposer très succinctement

dans une *Introduction* les résultats déjà acquis, dont la connaissance constitue le point de départ de notre travail.

Cette *Introduction* aura ainsi l'avantage de séparer nettement nos recherches personnelles de ce qui a été fait avant nous... à notre connaissance.

Systèmes numériques complexes. — Un nombre complexe est une expression de la forme

$$x \equiv x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

où $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont des unités complexes indépendantes et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des quantités numériques ordinaires.

Le produit x'' de deux de ces nombres x et x' sera déterminé, si l'on sait exprimer les deux produits $e_i e_k$ et $e_k e_i$ formés par chacun des couples d'unités linéairement en fonction des n unités primitives.

Ou encore, en posant

$$x' = x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + \ldots + x'_n e_n$$
$$x'' = x''_1 e_1 + x''_2 e_2 + \ldots + x''_n e_n,$$

on peut, pour définir le produit x'', exprimer chacun des paramètres de x'' en fonction des produits deux à deux de ceux de x et de x', savoir :

$$x''_1 = a_{11} x_1 x'_1 + a_{12} x_1 x'_2 + \ldots + a_{21} x_2 x'_1 + \ldots + a_{n1} x_n x'_n$$
$$x''_2 = a'_{11} x_1 x'_1 + a'_{12} x_1 x'_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans les deux cas on se trouve en présence de $n^2(n-1)$ coefficients, dont les valeurs définissent la multiplication dans le systeme considéré.

On réserve généralement le nom de systèmes numériques complexes à ceux pour lesquels la multiplication est une opération associative, c'est-

à-dire pour lesquels on a toujours

$$x''(x'x) = (x''.x')x,$$

x, x', x'' étant trois quantités complexes quelconques du système.

Dès lors les relations définissant la multiplication ne sont plus arbitraires, et il résulte de l'étude de M. Poincaré, sur les systèmes numériques complexes (1), qu'à chaque système numérique complexe (entendu dans le sens restreint) à n unités correspond un groupe de transformations à n paramètres ou, plus exactement, un couple de groupes paramétraux réciproques.

A chaque quantité complexe du système correspond une transformation du groupe et la multiplication complexe représente la composition des transformations du groupe.

On peut aussi regarder les n quantités numériques qui déterminent la quantité complexe comme les paramètres *homogènes* des transformations d'un groupe et alors l'ordre de celui-ci est $n - 1$.

C'est de cette matière que le système numérique des quaternions représente le groupe des rotations autour d'un point.

Puisque c'est dans les systèmes numériques complexes que nous cherchons la réalisation d'une Analyse géométrique, nous sommes amenés à chercher tout d'abord un groupe de transformations géométriques dont certaines soient susceptibles de représenter les points de l'espace, ensuite à chercher un système numérique complexe dans lequel un ensemble de quantités soit susceptible de représenter ledit groupe de transformations.

Le groupe fondamental de la Géométrie est le groupe euclidien ou groupe des déplacements sans déformation.

Il comprend des transformations susceptibles de caractériser les droites de l'espace (rotations d'un angle π), d'autres susceptibles de caractériser

(1) Poincaré, *Comptes rendus*, 1884, 2e semestre.

les vecteurs (translations), mais n'en comprend pas pouvant servir à représenter des points.

Cette condition se trouve réalisée dans le groupe discontinu formé par les déplacements et les transformations par symétrie.

Ces dernières en effet peuvent représenter des points (symétries par rapport aux points) et des plans (symétries par rapport aux plans).

Mais le groupe n'étant pas continu ne paraît pas susceptible d'être représenté par un système numérique complexe.

Il existe un groupe continu de transformations ponctuelles qui comprend le précédent, c'est celui des transformations par similitude, c'est-à-dire des transformations composées chacune d'une rotation et d'une homothétie.

Une telle transformation peut être obtenue par la succession d'une homothétie et d'une rotation autour d'une droite passant par le centre d'homothétie, et par suite est caractérisée par un point fixe (trois paramètres), une droite fixe passant par ce point (deux paramètres), un angle de rotation et un coefficient d'homothétie, et dépend ainsi de sept paramètres.

Une transformation par similitude conserve en général un point, une droite et un plan, savoir le centre d'homothétie, l'axe de rotation et le plan passant par ce point et perpendiculaire à cette droite.

Parmi ces transformations se trouvent les trois espèces de transformations par symétrie : par rapport aux points, aux plans et aux droites; elles sont caractérisées par les paramètres suivants :

	Angle de rotation.	Coefficient d'homothétie.
Symétrie par rapport à un point....	0	— 1
» une droite...	π	1
» un plan.....	π	— 1

Nous trouverons donc, dans le groupe des transformations par similitude, la représentation des éléments principaux de la Géométrie, point, plan, droite, au moyen des diverses symétries que ces éléments caractérisent.

Mais le groupe des transformations par similitude ne paraît pas pouvoir être représenté directement par un système numérique complexe.

Nous avons donc à chercher un système numérique complexe comprenant des quantités dont la multiplication soit une représentation de la composition des transformations par similitude.

Il est naturel de chercher la solution parmi les systèmes numériques comprenant celui des quaternions, puisque ce dernier représente le groupe des rotations autour d'un point compris dans celui des transformations par similitude.

Calcul des quaternions. — Un quaternion est une expression complexe de la forme

$$w + ix + jy + kz,$$

où w, x, y, z sont des quantités numériques ordinaires (positives, négatives ou imaginaires) et i, j, k des symboles particuliers ou unités complexes.

On pose, par définition,

$$\mathrm{S}q \equiv w \text{ (partie scalaire de } q),$$
$$\mathrm{V}q \equiv ix + jy + kz \text{ (partie vectorielle de } q)$$

et, par suite,

$$q \equiv \mathrm{S}q + \mathrm{V}q.$$

On pose encore

$$\mathrm{T}q \equiv \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \text{ (tenseur de } q).$$

L'addition des quaternions s'opère par celle des coefficients d'une même unité :

$$q + q' \equiv w + w' + i(x + x') + j(y + y') + k(z + z').$$

Le produit de deux quaternions est un quaternion, que l'on obtient en

procédant comme en Algèbre et en appliquant ensuite les règles suivantes :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \qquad jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j.$$

On voit que, dans le produit de deux quaternions, il n'est pas permis de changer l'ordre des facteurs; autrement dit, la multiplication des quaternions n'est pas une opération commutative.

Le calcul des quaternions est indépendant de toute signification géométrique, et l'on peut d'ailleurs lui en donner plusieurs.

Il ne sera question ici que de l'emploi habituel de ce calcul, le seul développé par son fondateur.

Le principe de cette analyse géométrique consiste à représenter par l'expression

$$\alpha \equiv ix + jy + kz$$

le vecteur dont les composantes suivant trois axes de coordonnées rectangulaires sont x, y, z.

On voit immédiatement que les symboles i, j, k représentent respectivement les vecteurs de longueur égale à l'unité dirigés suivant les axes de coordonnées.

La longueur de x est représentée par

$$\mathrm{T}\alpha \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Soient deux vecteurs

$$\alpha \equiv ix + jy + kz,$$
$$\beta \equiv ix' + jy' + kz'.$$

En effectuant le produit $\alpha\beta$ conformément aux règles données plus haut, on trouve

$$\mathrm{S}.\alpha\beta = -(xx' + yy' + zz'),$$
$$\mathrm{V}.\alpha\beta = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx').$$

On reconnaît que l'on a

$$S.\alpha\beta = S.\beta\alpha,$$
$$V.\alpha\beta = -V.\beta\alpha.$$

Soit θ l'angle des deux directions de α et de β. On a

$$S.\alpha\beta = -T\alpha.T\beta.\cos\theta.$$

Quant à $V.\alpha\beta$, c'est un vecteur perpendiculaire à α et à β et ayant pour longueur

$$T\alpha.T\beta.\sin\theta.$$

La direction de ce vecteur est liée à la disposition relative de α et de β de la même manière que le vecteur k est lié à la disposition relative de i et de j.

Si les directions de i, j, k présentent la disposition habituelle des axes de coordonnées, la propulsion dans le sens de $V.\alpha\beta$ est liée à la rotation de α vers β par un mouvement hélicoïdal dextrorsum, c'est-à-dire inverse du mouvement du tire-bouchon vulgaire.

Pour employer le calcul des quaternions comme analyse géométrique, il suffit de représenter chaque point de l'espace par le vecteur qui va d'une origine déterminée à ce point. Il est inutile de prendre des axes de coordonnées, car toute propriété géométrique peut être exprimée directement au moyen des vecteurs et des fonctions S et V.

Tels sont les principes essentiels du calcul des quaternions. Ils nous suffisent pour le but que nous nous proposons.

Rotations autour d'un point fixe. — Vérifions que le système numérique des quaternions représente, entre autres groupes, celui des rotations autour d'un point fixe.

Prenons les équations d'une rotation autour de l'origine sous la forme

donnée par Olinde Rodrigues :

$$(\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\,x' = (\alpha_0^2+\alpha_1^2-\alpha_2^2-\alpha_3^2)\,x + 2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_0\alpha_3)\,y + 2(\alpha_1\alpha_3+\alpha_0\alpha_2)\,z,$$

$$(\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\,y' = 2(\alpha_2\alpha_1+\alpha_0\alpha_3)\,x + (\alpha_0^2-\alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_3^2)\,y + 2(\alpha_2\alpha_3-\alpha_0\alpha_1)\,z,$$

$$(\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\,z' = 2(\alpha_3\alpha_1-\alpha_0\alpha_2)\,x + 2(\alpha_3\alpha_2+\alpha_0\alpha_1)\,y + (\alpha_0^2-\alpha_1^2-\alpha_2^2+\alpha_3^2)\,z.$$

Si λ, μ, ν sont les angles de l'axe de la rotation avec les axes de coordonnées et 2θ l'angle de la rotation, on a les relations suivantes :

$$\cos\lambda = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}, \qquad \cos\mu = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}, \qquad \cos\nu = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}},$$

$$\cos\theta = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}.$$

Le sens de la rotation est lié à la direction positive de l'axe de rotation par une torsion dextrorsum.

C'est la convention que nous adopterons.

Les coefficients α_0, α_1, α_2, α_3 peuvent être pris comme paramètres homogènes de la rotation.

Opérons successivement deux rotations représentées respectivement par les systèmes de valeurs $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $(\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$. La rotation résultante pourra être représentée par un système de paramètres α''_0, α''_1, α''_2, α''_3 déterminés par les relations

$$\alpha''_0 = \alpha_0\alpha'_0 - \alpha_1\alpha'_1 - \alpha_2\alpha'_2 - \alpha_3\alpha'_3,$$
$$\alpha''_1 = \alpha_0\alpha'_1 + \alpha_1\alpha'_0 - \alpha_2\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_2,$$
$$\alpha''_2 = \alpha_0\alpha'_2 + \alpha_1\alpha'_3 + \alpha_2\alpha'_0 - \alpha_3\alpha'_1,$$
$$\alpha''_3 = \alpha_0\alpha'_3 - \alpha_1\alpha'_2 + \alpha_2\alpha'_1 + \alpha_3\alpha'_0.$$

Or on voit que, si l'on pose

$$q = \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3,$$
$$q' = \alpha'_0 + i\alpha'_1 + j\alpha'_2 + k\alpha'_3,$$
$$q'' = \alpha''_0 + i\alpha''_1 + j\alpha''_2 + k\alpha''_3,$$

on a la relation

$$q'' = q'q.$$

Ainsi la multiplication des quaternions représente la composition des rotations autour d'un point fixe, un quaternion représentant (en paramètres homogènes) une rotation.

Si l'on pose

$$\rho = ix + jy + kz,$$
$$\rho' = ix' + jy' + kz',$$

les formules d'Olinde Rodrigues données plus haut sont représentées par l'équation quaternionienne

$$\rho' = q\rho q^{-1},$$

qui peut s'écrire, en multipliant à droite par q,

$$\rho' q = q\rho.$$

On en déduit

$$\mathrm{V}.\rho' q = \mathrm{V}.q\rho,$$

qui représente les formules connues

$$\alpha_0 x' + \alpha_3 y' - \alpha_2 z' = \alpha_0 x - \alpha_3 y + \alpha_2 z,$$
$$\alpha_0 y' + \alpha_1 z' - \alpha_3 x' = \alpha_0 y - \alpha_1 z + \alpha_3 x,$$
$$\alpha_0 z' + \alpha_2 x' - \alpha_1 y' = \alpha_0 z - \alpha_2 x + \alpha_1 y.$$

Le groupe des rotations autour d'un point n'est pas le seul groupe de transformations géométriques représenté par le système des quaternions.

Ce système représente aussi le groupe des transformations projectives sur une droite et le groupe des transformations linéaires spéciales autour d'un point dans le plan.

Ces deux groupes ont, en effet, la même structure que le groupe des rotations autour d'un point.

Déplacements sans déformation et biquaternions. — Le groupe des déplacements sans déformation de l'espace ou groupe euclidien peut être représenté de la manière que nous avons définie par un système numérique complexe, savoir celui des biquaternions, toutefois pas aussi directement que le groupe des rotations l'est par le système des quaternions.

Un biquaternion est une quantité complexe de la forme

$$q + \omega q_1,$$

où q et q_1 sont des quaternions et ω une nouvelle unité complexe commutative avec les quatre unités quaternioniennes et ayant son carré nul. On a donc

$$\omega i = i\omega, \qquad \omega j = j\omega, \qquad \omega k = k\omega, \qquad \omega^2 = 0.$$

Les biquaternions sont donc des quantités complexes à huit unités indépendantes, qui sont

$$1, i, j, k, \omega, \omega i, \omega j, \omega k.$$

Ce système ne peut donc pas représenter directement, même en paramètres homogènes, le groupe euclidien, qui ne comprend que six paramètres.

Mais on peut faire correspondre à chaque transformation du groupe euclidien ∞^2 biquaternions.

Un déplacement sans déformation peut être représenté par les équa-

tions suivantes :

$$\begin{aligned}
(\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)x' &= 2(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2+\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0)\\
&\quad+(\alpha_0^2+\alpha_1^2-\alpha_2^2-\alpha_3^2)x\\
&\quad+2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_0\alpha_3)y+2(\alpha_1\alpha_3+\alpha_0\alpha_2)z,\\
(\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)y' &= 2(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3+\alpha_0\beta_2-\alpha_2\beta_0)\\
&\quad+2(\alpha_2\alpha_1+\alpha_0\alpha_3)x\\
&\quad+(\alpha_0^2-\alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_3^2)y+2(\alpha_2\alpha_3-\alpha_0\alpha_1)z,\\
(\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)z' &= 2(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+\alpha_0\beta_3-\alpha_3\beta_0)\\
&\quad+2(\alpha_3\alpha_1-\alpha_0\alpha_2)x\\
&\quad+2(\alpha_3\alpha_2+\alpha_0\alpha_1)y+(\alpha_0^2-\alpha_1^2-\alpha_2^2+\alpha_3^2)z.
\end{aligned}$$

Ces équations contiennent huit paramètres

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3.$$

Mais on voit que la transformation n'est pas changée lorsqu'on multiplie tous les paramètres par un même nombre et qu'on ajoute à

$$\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$$

des quantités respectivement proportionnelles à α_0, α_1, α_2, α_3.

Enfin on peut vérifier que, si l'on opère successivement deux déplacements correspondant respectivement aux deux systèmes de valeurs des paramètres (α, β) et (α', β'), le déplacement résultant pourra être obtenu par le système de valeurs (α'', β'') déterminé par les relations suivantes :

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
\alpha_0'' &= \alpha_0\alpha_0'-\alpha_1\alpha_1'-\alpha_2\alpha_2'-\alpha_3\alpha_3',\\
\alpha_1'' &= \alpha_0\alpha_1'+\alpha_1\alpha_0'-\alpha_2\alpha_3'+\alpha_3\alpha_2',\\
\alpha_2'' &= \alpha_0\alpha_2'+\alpha_1\alpha_3'+\alpha_2\alpha_0'-\alpha_3\alpha_1',\\
\alpha_3'' &= \alpha_0\alpha_3'-\alpha_1\alpha_2'+\alpha_2\alpha_1'+\alpha_3\alpha_0',\\
\beta_0'' &= \alpha_0\beta_0'-\alpha_1\beta_1'-\alpha_2\beta_2'-\alpha_3\beta_3'+\beta_0\alpha_0'-\beta_1\alpha_1'-\beta_2\alpha_2'-\beta_3\alpha_3',\\
\beta_1'' &= \alpha_0\beta_1'+\alpha_1\beta_0'-\alpha_2\beta_3'+\alpha_3\beta_2'+\beta_0\alpha_1'+\beta_1\alpha_0'-\beta_2\alpha_3'+\beta_3\alpha_2',\\
\beta_2'' &= \alpha_0\beta_2'+\alpha_2\beta_0'-\alpha_3\beta_1'+\alpha_1\beta_3'+\beta_0\alpha_2'+\beta_2\alpha_0'-\beta_3\alpha_1'+\beta_1\alpha_3',\\
\beta_3'' &= \alpha_0\beta_3'+\alpha_3\beta_0'-\alpha_1\beta_2'+\alpha_2\beta_1'+\beta_0\alpha_3'+\beta_3\alpha_0'-\beta_1\alpha_2'+\beta_2\alpha_1'.
\end{aligned}\right.$$

Or on a là le développement de la relation

$$r'' = r' r,$$

où r représente le biquaternion

$$\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3 + \omega(\beta_0 + i\beta_1 + j\beta_2 + k\beta_3)$$

et r', r'' des biquaternions formés d'une manière analogue avec les paramètres accentués.

La composition des déplacements euclidiens sera donc représentée par la multiplication des biquaternions, en faisant correspondre à chaque déplacement ∞^3 biquaternions obtenus en multipliant l'un quelconque d'entre eux par une expression de la forme

$$a + \omega b,$$

où a et b sont des quantités ordinaires.

Pour compléter l'analogie entre les déplacements et les rotations, donnons ici les équations du déplacement sous la forme suivante, qui résultera plus tard très simplement du calcul des triquaternions :

$$\begin{aligned}
\alpha_0 x' + \alpha_3 y' - \alpha_2 z' - \beta_1 &= \alpha_0 x - \alpha_3 y + \alpha_2 z + \beta_1, \\
\alpha_0 y' + \alpha_1 z' - \alpha_3 x' - \beta_2 &= \alpha_0 y - \alpha_0 z + \alpha_1 x + \beta_2, \\
\alpha_0 z' + \alpha_2 x' - \alpha_1 y' - \beta_3 &= \alpha_0 z - \alpha_2 x + \alpha_1 y + \beta_3.
\end{aligned}$$

Ces équations ne contiennent pas β_0.

Pour supprimer l'indétermination de la correspondance entre les biquaternions et les déplacements nous imposerons au biquaternion

$$q + \omega q_1,$$

représentant un déplacement, la condition de satisfaire à la relation

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0,$$

que l'on peut écrire

$$q\mathfrak{q}_1 + q_1\mathfrak{q} = 0,$$

$\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}_1$ représentant les quaternions conjugués de q et q_1, c'est-à-dire les quaternions obtenus en changeant le signe des parties vectorielles.

Deux biquaternions satisfaisant à cette condition ont un produit y satisfaisant également. Autrement dit cette relation caractérise un sous-groupe.

Le biquaternion $q + \omega q_1$ satisfaisant à la relation précédente représente un déplacement dont l'axe a pour coordonnées

$$\frac{p_{01}}{\alpha_1} : \frac{p_{02}}{\alpha_2} : \frac{p_{03}}{\alpha_3} : \frac{p_{23}}{\beta_1 + \frac{\alpha_0\beta_0\alpha_1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} : \frac{p_{31}}{\beta_2 + \frac{\alpha_0\beta_0\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} : \frac{p_{12}}{\beta_3 + \frac{\alpha_0\beta_0\alpha_3}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}},$$

dont l'angle de rotation 2θ et le glissement suivant l'axe $2\tau_1$ sont donnés par les relations

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}, \qquad \tau_1 = -\frac{\beta_0}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}.$$

Suivant le système exposé qui consiste à représenter un élément géométrique par une transformation telle qu'il y ait correspondance univoque, nous représenterons une droite par le biquaternion caractérisant la rotation d'un angle π autour de cette droite, de sorte qu'une ligne droite est représentée en biquaternions par une expression de la forme

$$\rho + \omega\rho_1,$$

où ρ et ρ_1 sont des vecteurs satisfaisant à la condition

$$\mathrm{S}.\rho\rho_1 = 0.$$

Les vecteurs ρ et ρ_1 représentent l'ensemble des six coordonnées de la droite, et si la condition précédente n'est pas remplie ils peuvent être regardés comme les coordonnées d'un complexe linéaire.

Le calcul des biquaternions permet de traiter avec une remarquable simplicité un grand nombre de questions relatives aux déplacements et aux complexes linéaires.

Mais, s'il constitue un procédé d'analyse commode pour la Géométrie réglée, en revanche il ne permet pas d'introduire dans les calculs des symboles représentant des points, et, à ce point de vue, il est très inférieur au calcul des quaternions, qui, lui, est un système d'analyse absolument complet.

Nous avons vu que nous aurons la possibilité d'introduire des symboles représentant les points, si nous trouvons un système numérique complexe contenant des quantités susceptibles de représenter les transformations par similitude.

La recherche de ces systèmes est considérablement facilitée par la proposition suivante due à M. Scheffers (1):

Tout système quaternionien (c'est-à-dire comprenant le système des quaternions) dont l'unité se confond avec celle du système des quaternions s'obtient en multipliant les quatre unités quaternioniennes par $\mu + 1$ *unités* $1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu$ *commutatives avec les premières et formant elles-mêmes un système numérique complexe.*

On voit que le système des biquaternions satisfait bien à cette condition, les unités 1 et ω formant un système numérique.

Il n'existe d'ailleurs que deux systèmes numériques binaires essentiellement différents. Ils sont caractérisés respectivement par

$$\omega^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega^2 = 1.$$

Il n'existe donc que deux systèmes quaternioniens à huit unités.

(1) Scheffers, *Complexe-Zahlen Systeme* (*Math. Ann.*, Bd XXXIX, 1891).

Tandis que le premier peut servir, comme nous l'avons vu, à représenter les transformations du groupe euclidien, le second joue le même rôle relativement aux déplacements sans déformation dans la Géométrie non-euclidienne.

C'est donc parmi les systèmes quaternioniens à plus de huit unités que nous chercherons celui qui réalise les conditions voulues.

CHAPITRE I.

PRINCIPES DU CALCUL DES TRIQUATERNIONS.

Système numérique complexe des triquaternions. — Nous avons constaté que les systèmes numériques quaternioniens à huit unités ne comprennent pas des quantités complexes susceptibles de représenter les transformations ponctuelles de l'espace que nous avons appelées *transformations par similitude.* C'est donc aux systèmes quaternioniens à douze unités que nous demanderons la réalisation de cette condition.

Chacun de ces systèmes, d'après le théorème de M. Scheffers donné ci-dessus, est composé des quantités complexes de la forme

$$q + \omega q_1 + \mu q_2,$$

où q, q_1, q_2 sont des quaternions, et $1, \omega, \mu$ des unités commutatives avec les unités quaternioniennes et formant entre elles un système numérique.

Un de ces systèmes est caractérisé par les règles de multiplication suivantes :

$$(1) \qquad \omega^2 = 0, \qquad \mu^2 = 1, \qquad \omega\mu = -\mu\omega = \omega,$$

règles moyennant lesquelles les unités $1, \omega, \mu$ déterminent un système numérique complexe, comme on peut le vérifier directement.

C'est à ce système numérique complexe à douze unités que nous donnons le nom de *système des triquaternions*.

Nous allons d'abord démontrer que ce système comprend des quantités susceptibles de représenter les transformations par symétrie. Cette démonstration est basée sur une remarque de M. Study, remarque qui a été pour nous le point de départ de la présente étude.

Nous avons vu que les transformations par symétrie formaient avec les déplacements un groupe composé des transformations par similitude dans lesquelles le coefficient d'homothétie est égal à ± 1.

M. Study (1) a montré que la composition des transformations de ce groupe discontinu était susceptible d'être représentée par les formules (1) (*Introduction*, p. 11) moyennant les conventions suivantes :

Lorsque l'on entend que le biquaternion

$$q + \omega q_1 \equiv \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3 + \omega(\beta_0 + i\beta_1 + j\beta_2 + k\beta_3)$$

représente une transformation à coefficient d'homothétie égal à -1, le point fixe de la transformation a pour coordonnées

$$\frac{\beta_1}{\alpha_0}, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_0}, \quad \frac{\beta_3}{\alpha_0},$$

et la rotation est représentée (direction de l'axe et angle de rotation) de la manière habituelle par le quaternion

$$\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3.$$

Dans ces conditions, les formules (1) de l'*Introduction* représentent le produit de deux transformations du groupe discontinu considéré, *pourvu que, dans les seconds membres, on change les signes des termes contenant*

(1) Study, *Parameter-Darstellung der Bewegungen und Umlegungen* (*Math. Ann.*, Bd XXXIX, 1891).

les paramètres β, *si la transformation opérée la seconde* (*paramètres accentués*) *est une transformation à coefficient* -1. De plus le résultat devra être considéré comme une transformation à coefficient -1, si une et une seule des transformations composantes est à coefficient -1, et comme un déplacement dans tous les autres cas.

Traduisons cette règle en formules.

Distinguons les transformations à coefficient -1 par un trait vertical placé devant les biquaternions.

La règle de M. Study donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
(q' + \omega q_1')\ (q + \omega q_1) &= \quad q'q + \omega (q'q_1 + q_1'q), \\
(q' + \omega q_1') \,|\, (q + \omega q_1) &= |[q'q + \omega (q'q_1 + q_1'q)], \\
|(q' + \omega q_1')\ (q + \omega q_1) &= |[q'q + \omega (q_1'q - q'q_1)|, \\
|(q' + \omega q_1') \,|\, (q + \omega q_1) &= \quad q'q + \omega (q_1'q - q'q_1).
\end{aligned}$$

Or cette règle peut être réalisée d'une manière purement algébrique. Il suffit pour cela de représenter une transformation à coefficient -1 par l'expression

$$\mu q + \omega q_1,$$

en soumettant μ et ω aux règles de multiplication (1) données au commencement de ce Chapitre. On aura en effet, au lieu des trois dernières des formules ci-dessus, les formules suivantes, qui sont concordantes avec elles

$$\begin{aligned}
(q' + \omega q_1')(\mu q + \omega q_1) &= \mu q'q + \omega (q'q_1 + q_1'q), \\
(\mu q' + \omega q_1')(\mu q + \omega q_1) &= \mu q'q + \omega (q_1'q - q'q_1), \\
(\mu q' + \omega q_1')(\mu q + \omega q_1) &= q'q \quad + \omega (q_1'q - q'q_1).
\end{aligned}$$

Comme d'ailleurs les quantités de la forme

$$q + \omega q_1 + \mu q_2$$

forment bien un système numérique complexe, le problème que nous nous sommes proposé est résolu.

Nous soumettons les triquaternions de la forme

$$\mu q_2 + \omega q_1,$$

représentant des transformations à coefficient — 1, à la condition

$$q_2 \mathfrak{q}_1 + q_1 \mathfrak{q}_2 = 0.$$

Nous sommes en possession d'un système numérique complexe à 12 unités comprenant des quantités susceptibles de représenter les diverses transformations par symétrie et par suite les points, les plans et les droites.

Nous avons déjà vu dans l'Introduction que les droites sont représentées par des biquaternions de la forme

$$\rho + \omega \rho_1,$$

où ρ et ρ_1 sont des vecteurs satisfaisant à la condition

$$S \rho \rho_1 = 0.$$

Les points et les plans seront représentés, d'après ce qui a été dit sur les diverses espèces de symétrie, par des expressions de la forme

$$\mu q + \omega q_1,$$

où l'on égale l'angle de rotation à zéro pour les points et à π pour les plans, ce qui annule dans le premier cas la partie vectorielle de q et dans le second cas la partie scalaire. De plus les quaternions q et q_1 doivent satisfaire à la condition

$$q \mathfrak{q}_1 + q_1 \mathfrak{q} = 0,$$

ce qui annule, dans le cas du point, la partie scalaire de q_1 et, dans le cas

du plan, la partie vectorielle, car il est nécessaire, dans ce dernier cas, de prendre comme centre de la transformation un point à distance finie.

Ainsi les éléments primordiaux de la Géométrie trouvent une représentation en triquaternions, savoir :

Un point de coordonnées $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}$ par

$$\mu x_0 + \omega (i x_1 + j x_2 + k x_3) ;$$

Un plan d'équation

$$\beta_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

par

$$\omega \beta_0 + \mu (i \alpha_1 + j \alpha_2 + k \alpha_3) ;$$

Une droite de coordonnées homogènes

$$\frac{p_{01}}{\alpha_1} : \frac{p_{02}}{\alpha_2} : \frac{p_{03}}{\alpha_3} : \frac{p_{23}}{\beta_1} : \frac{p_{31}}{\beta_2} : \frac{p_{22}}{\beta_3}$$

par

$$i \alpha_1 + j \alpha_2 + k \alpha_3 + \omega (i \beta_1 + j \beta_2 + k \beta_3),$$

avec la condition

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0.$$

Nous trouvons donc parmi les triquaternions des quantités susceptibles de représenter les points, les droites et les plans.

Cela nous suffit pour établir les règles du calcul géométrique, et c'est à leur recherche que nous allons nous appliquer d'abord, renvoyant à la fin du Chapitre la démonstration du fait que toutes les transformations par similitude trouvent leur représentation parmi les triquaternions.

Règles fondamentales du calcul. — Pour remplir la condition de faire disparaître toute considération de coordonnées, nous devons donner aux règles de calcul déjà posées une forme indépendante du choix des axes.

Dans le calcul des quaternions, ce but est atteint par l'introduction des fonctions S et V, au moyen desquelles un quaternion est décomposé d'une manière indépendante du choix des axes.

Nous décomposerons un triquaternion r d'une manière analogue.

Il suffit pour cela d'écrire

$$\begin{aligned} r &= w + \rho + \omega(w_1 + \rho_1) + \mu(w_2 + \rho_2) \\ &= w + (\omega w_1 + \mu\rho_2) + (\mu w_2 + \rho + \omega\rho_1) \\ &= w + p + l, \end{aligned}$$

où w représente une quantité ordinaire, p un plan et l une expression de la forme

$$l = \mu w_2 + \rho + \omega\rho_1,$$

dont nous avons à chercher la signification géométrique.

On voit d'abord que l peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme de la somme d'un point et d'une droite.

Comme cas particuliers :

Si $\rho = 0$, l représente un point ;

Si $w_2 = 0$, l représente un complexe linéaire, qui devient une droite dans le cas où $S\rho\rho_1 = 0$;

Si l'on a $\rho = 0$, $w_2 = 0$, l'expression l se réduit à $\omega\rho_1$ et représente à la fois le point à l'infini dans la direction indiquée par ρ_1 et la droite de l'infini commune aux plans perpendiculaires à ρ_1, c'est-à-dire la polaire de ce point à l'infini par rapport au cercle imaginaire de l'infini. Notre calcul ne distingue donc pas entre les points et les droites de l'infini, et ce sont ces éléments que nous appellerons des *vecteurs*.

Enfin, d'une manière générale, *l'expression l peut s'écrire, et d'une seule manière, sous la forme de la somme d'un point et d'une droite passant par ce point.*

On peut le voir géométriquement.

Cela résulte aussi de ce qu'on peut écrire l sous la forme

$$l = (\mu\omega_2 + \omega\beta) + (\rho + \omega\rho_1 - \omega\beta),$$

où β est un vecteur (au sens quaternionien) déterminé par l'équation vectorielle linéaire

$$V\rho\beta + \omega_2(\rho_1 - \beta) = 0,$$

qui exprime que la droite

$$\rho + \omega(\rho_1 - \beta)$$

passe par le point

$$\mu\omega_2 + \omega\beta.$$

En résolvant par les procédés du calcul des quaternions l'équation en β ci-dessus, on trouve pour la valeur de β

$$(\omega_2^2 - \rho^2)\beta = \omega_2^2\rho + \omega_2 V\rho\rho_1 - \rho S\rho\rho_1.$$

Moyennant cette valeur de β, l'expression l prend la forme

$$l = m + d,$$

où m représente un point et d une droite passant par ce point.

Nous appellerons *élément linéaire* l'ensemble des notions géométriques représentées par une telle expression.

Un élément linéaire dépend en somme d'un point, d'un segment (direction et longueur) et d'un coefficient (masse ou tenseur).

Enfin nous pouvons définir la signification géométrique d'un triquaternion r en convenant qu'il représente une quantité ordinaire w, un élément linéaire l et un plan p, définition qui comprend celles que nous avons rencontrées jusqu'ici et qui étaient uniquement relatives aux déplacements sans déformation et à ceux-ci accompagnés de symétrie.

Puisque nous basons la signification géométrique d'un triquaternion r

sur sa décomposition en trois parties ω, l et p, il en résulte que cette décomposition est indépendante du choix des axes de coordonnées; car l'effet d'un changement de coordonnées sur le triquaternion n'est défini que par la signification géométrique de celui-ci.

Nous poserons donc

$$\omega = \mathrm{G}r, \qquad l = \mathrm{L}r, \qquad p = \mathrm{P}r.$$

Les fonctions G, L, P joueront dans le calcul des triquaternions un rôle analogue à celui des fonctions S et V dans le calcul des quaternions.

Elles permettent de faire disparaître tout système de référence et de ne plus se servir des règles de multiplication données par les formules (1) de la page 15.

Les seules règles à employer sont données par les formules suivantes, qu'on vérifie facilement

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \mathrm{G}ll' = \mathrm{G}l'l, & \mathrm{L}ll' = -\mathrm{L}l'l, & \mathrm{P}ll' = \mathrm{P}l'l, \\ \mathrm{G}lp = 0, & \mathrm{L}lp = \mathrm{L}pl, & \mathrm{P}lp = -\mathrm{P}pl, \\ \mathrm{G}pp' = \mathrm{G}p'p, & \mathrm{L}pp' = -\mathrm{L}p'p, & \mathrm{P}pp' = 0, \end{cases}$$

auxquelles il faut ajouter la règle évidente qu'une quantité ordinaire est commutative avec tout triquaternion.

En ne tenant pas compte de ce dernier cas, où l'un des facteurs est une quantité numérique, les résultats précédents peuvent être résumés de la manière suivante :

La fonction G admet l'interversion des facteurs et s'annule, quand les facteurs sont d'espèces différentes.

La fonction L admet l'interversion, quand les facteurs sont d'espèces différentes, et change de signe dans le cas contraire.

La fonction P se comporte d'une manière inverse et de plus s'annule, lorsque les deux facteurs sont des plans.

Nous introduirons quelques notations, qui nous seront utiles dans les applications.

Étant donné un élément linéaire

$$l = m + d,$$

où d est une droite passant par le point m, nous poserons

$$1 = m - d.$$

On peut qualifier les éléments linéaires l et 1 de *conjugués*.

On voit que l'on a

$$\begin{aligned} l1 &= m^2 - d^2 - md + dm \\ &= m^2 - d^2 - \mathrm{G}md - \mathrm{P}md - \mathrm{L}md + \mathrm{G}dm + \mathrm{P}dm + \mathrm{L}dm. \end{aligned}$$

On vérifiera directement que le produit d'un point par une droite a sa partie numérique nulle, c'est-à-dire que l'on a

$$\mathrm{G}md = \mathrm{G}dm = 0.$$

On a de plus, en vertu des formules (I),

$$\mathrm{P}md = \mathrm{P}dm.$$

Enfin on a, en vertu des mêmes formules,

$$\mathrm{L}md = -\mathrm{L}dm,$$

et l'on vérifiera que, lorsque le point m est situé sur la droite d, on a

$$\mathrm{L}md = 0.$$

On a donc en fin de compte

$$l1 = m^2 - d^2,$$

où m^2 est une quantité ordinaire positive et d^2 une quantité ordinaire négative.

De la formule précédente on déduit l'expression de l'inverse d'un élément linéaire

$$l^{-1} = \frac{1}{m^2 - d^2} 1.$$

Par analogie avec le calcul des quaternions, nous appellerons *tenseur d'un triquaternion* r et nous désignerons par Tr l'expression

$$Tr = \sqrt{w^2 + l1 - p^2}.$$

Enfin nous rencontrerons très souvent des triquaternions r dans lesquels la partie planaire Pr se réduit au symbole du plan de l'infini ω multiplié par une quantité ordinaire w.

Comme il est parfois avantageux de considérer directement w, nous poserons, pour ce cas,

$$Pr = w,$$

c'est-à-dire

$$\omega Pr = Pr = \omega w. \tag{2}$$

Cette notation n'a évidemment aucun sens dans le cas où Pr représente un plan quelconque.

Avant de pouvoir se servir utilement et uniquement des formules (I), il est nécessaire de déterminer la signification d'un certain nombre d'expressions simples.

Cette interprétation préliminaire correspond à l'établissement des formules fondamentales en Géométrie analytique.

Ce qu'il s'agit ici d'interpréter, c'est le produit de deux triquaternions.

Le nombre des résultats à retenir est à la vérité assez grand, mais il est compensé par leur simplicité.

Du reste, rien n'empêche de les avoir sous les yeux au lieu de faire appel à la mémoire.

Nous avons rejeté dans une annexe la recherche de la signification du produit de deux triquaternions.

Nous indiquerons ici quelques-uns des résultats les plus usuels.

Nous désignerons par μ, δ, ϖ, respectivement un point, une droite, un plan, ayant leur tenseur égal à l'unité.

L'expression $P\mu\varpi$ représente le symbole du plan de l'infini ω multiplié par la distance du point μ au plan ϖ prise avec un signe positif ou négatif suivant la région où se trouve μ, de sorte que l'équation ponctuelle du plan ϖ est

$$P\mu\varpi = 0,$$

ou, en nous servant de la notation introduite par la formule (2) de ce Chapitre,

$$\mathrm{P}\mu\varpi = 0.$$

L'expression $L\mu\delta$ représente le vecteur perpendiculaire au plan contenant le point μ et la droite δ pris avec un tenseur égal à la distance du point à la droite, de sorte que la formule

$$L\mu\delta = 0$$

exprime que le point μ est situé sur la droite δ.

L'équation ci-dessus représente trois equations ordinaires, puisque $L\mu\delta$ est un vecteur.

Si l'on y considère δ comme une droite fixe et μ comme un point variable, ces trois équations linéaires et homogènes en μ ne sont pas indépendantes. Car $L\mu\delta$ n'est pas un vecteur quelconque. Il satisfait en effet à la condition d'être rectangulaire avec δ.

L'équation considérée ne représente donc que deux équations linéaires homogènes indépendantes, et par suite le point μ conserve bien un degré de liberté, l'indépendance du tenseur mise à part.

Si au contraire on prend δ comme variable, $L\mu\delta$ est un vecteur quelconque et l'équation représente trois équations linéaires homogènes indépendantes.

Ces trois équations expriment que δ est une droite (et non un complexe) et que cette droite passe par le point μ.

L'expression $L\delta\varpi$ représente le point d'intersection de la droite δ et du plan ϖ pris avec un tenseur égal au sinus de l'angle de la droite et du plan.

La formule

$$L\delta\varpi = 0$$

exprime que la droite δ est située dans le plan ϖ.

Cette formule représente quatre formules ordinaires.

Si l'on y considère l'un des termes δ et ϖ comme variable et l'autre comme constant, elle représente quatre équations linéaires homogènes. Mais, dans aucun cas, ces équations ne sont indépendantes.

Car, si δ est constant, le point $L\delta\varpi$ satisfait à la relation

$$L.\,\delta L\delta\varpi = 0,$$

et, si ϖ est constant, il satisfait à la relation

$$P.\,\varpi L\delta\varpi = 0.$$

Bien entendu ces relations résultent facilement des règles de calcul (I).

La formule

$$TL\delta\varpi = 0$$

exprime que le point d'intersection $L\delta\varpi$ devient un vecteur, c'est-à-dire que la droite δ est parallèle au plan ϖ.

Enfin l'expression $L\omega\delta$, ou plus simplement $\omega\delta$, représente le point à l'infini sur δ.

L'expression $L\varpi\varpi'$ représente la droite d'intersection des plans ϖ et ϖ' prise avec un tenseur égal au sinus de l'angle des deux plans.

La formule

$$L\varpi\varpi' = 0$$

exprime que les plans ϖ et ϖ' se confondent.

Considérée comme une équation en ϖ, elle donne lieu à des remarques analogues à celles déjà faites.

L'expression $P\delta\delta'$ représente le symbole ω du plan de l'infini multiplié par la plus courte distance des deux droites δ et δ' et par le sinus de leur angle.

La formule

$$P\delta\delta' = 0$$

exprime donc que les deux droites sont situées dans un même plan.

$P\delta\delta'$ représente le moment des deux droites.

Soit c un complexe de tenseur quelconque.

L'équation en δ

$$Pc\delta = 0$$

est l'équation réglée du complexe c.

C'est d'ailleurs la forme la plus générale de l'équation linéaire à laquelle peut être soumise la droite δ.

Si γ et γ' sont deux complexes de tenseur égal à l'unité, l'expression $P\gamma\gamma'$ représente le moment des deux complexes, de sorte que la formule

$$P\gamma\gamma' = 0$$

exprime que les deux complexes γ et γ' sont en involution.

L'expression $\mathrm{P}\gamma^2$ représente l'automoment ou paramètre du complexe γ et la formule

$$\mathrm{P}\gamma^2 = 0$$

exprime que γ est un complexe spécial ou, suivant notre terminologie, une droite.

L'expression $\mathrm{G}\delta\delta'$ représente, changé de signe, le cosinus de l'angle formé par les directions positives des deux droites δ et δ'.

La formule

$$\mathrm{G}\delta\delta' = 0$$

exprime l'orthogonalité des deux droites δ et δ'.

$\mathrm{G}\delta\delta'$, étant une fonction linéaire et homogène de δ, doit pouvoir s'écrire sous la forme

$$\mathrm{P}\delta c,$$

et en effet l'on vérifiera facilement que l'on a

$$\mathrm{G}\delta\delta' = \mathrm{P}.\delta\omega\delta'.$$

L'équation en δ

$$\mathrm{G}\delta\delta' = 0$$

est donc l'équation du complexe spécial $\omega\delta'$.

L'expression $\mathrm{G}\varpi\varpi'$ représente, changé de signe, le sinus de l'angle des plans ϖ et ϖ'.

L'expression $\mathrm{L}\mu\mu'$ représente le vecteur de μ' vers μ, et la formule

$$\mathrm{L}\mu\mu' = 0$$

exprime la coïncidence des deux points.

L'expression $\mathrm{G}\mu\mu'$ est égale à l'unité.

L'expression $\mathrm{L}\mu\varpi$ représente la perpendiculaire menée du point μ sur le plan ϖ prise dans le sens positif du plan.

L'expression $P\mu\delta$ représente le plan mené par μ perpendiculairement à δ, le côté positif du plan étant déterminé par le sens positif de δ.

L'expression $P\delta\varpi$ représente le plan mené par δ perpendiculairement à ϖ, pris avec un tenseur égal au sinus de l'angle de la droite et de la direction positive de la normale au plan.

Signalons enfin les formules suivantes :

$$G\mu\delta \equiv 0, \qquad P\mu\mu' \equiv 0, \qquad P\varpi\varpi' \equiv 0.$$

Inverse d'un triquaternion. — Soit le triquaternion

$$r = w + l + p.$$

Pour connaître l'inverse de r il nous suffit de trouver un triquaternion dont le produit par r soit une quantité numérique ordinaire.

On vérifie que cette condition est remplie par le triquaternion

$$(w + 1 - p)\,(w - l + p)\,(w - {}^{1} - p).$$

On a en effet, en posant comme toujours

$$l = m + d,$$

$$\begin{aligned}
&(w + l + p)\,(w + 1 - p)\,(w - l + p)\,(w - 1 - p)\\
&= [w^2 + 2wm + (l + p)(1 - p)]\,[w^2 - 2wm + (l - p)(1 + p)]\\
&= w^4 + w^2[(l - p)(l + p) + (l + p)(1 - p) - 4m^2]\\
&\quad + 2w[m(l - p)(1 + p) - (l + p)(1 - p)m]\\
&\qquad + (l + p)(1 - p)(l - p)(1 + p)\\
&= w^4 + 2w^2(l1 - p^2 - 2m^2)\\
&\quad + 2w[m(l1 - p^2 + mp - pm + dp + pd)\\
&\qquad - (l1 - p^2 - pm + pm - dp - pl)m]\\
&\quad + (l + p)(1 - p)(l - p)(1 + p)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&(w+l+p)(w+1-p)(w-l+p)(w-1-p)\\
&= w^4 + 2w^2(l1 - p^2 - 2m^2) + 8w\,\mathrm{G}m\,\mathrm{L}pd\\
&\quad + (l1 - p^2 + 2\omega\,\mathrm{P}pm - 2\,\mathrm{L}pd)(l1 - p^2 - 2\omega\,\mathrm{P}pm + 2\,\mathrm{L}pd)\\
&= (w^2 + l1 - p^2)^2 - 4(w^2 m^2 - 2w\,\mathrm{T}m.\,\mathrm{T}\,\mathrm{L}pd + \mathrm{L}^2 pd)\\
&= (w^2 + l1 - p^2)^2 - 4(w\,\mathrm{T}m - \mathrm{T}\mathrm{L}pd)^2.
\end{aligned}$$

On a donc, pour l'inverse du triquaternion r, la formule

$$\begin{aligned}
&[(w^2 + l1 - p^2)^2 - 4(w\,\mathrm{T}m - \mathrm{T}\,\mathrm{L}pd)^2]\,r^{-1}\\
&= (w+1-p)(w-l+p)(w-1-p).
\end{aligned}$$

Signalons les formules particulières plus simples :

$$\begin{aligned}
(w+m)(w-m) &= w^2 - m^2,\\
(w+d)(w-d) &= w^2 - d^2,\\
(w+p)(w-p) &= w^2 - d^2.
\end{aligned}$$

On peut déterminer systématiquement l'inverse d'un triquaternion en utilisant le calcul des quaternions.

Soit

$$\begin{aligned}
r &= q + \omega q_1 + \mu q_2,\\
r' &= q' + \omega q'_1 + \mu q'_2.
\end{aligned}$$

Effectuons le produit rr' et écrivons que ce produit se réduit à une quantité numérique. On a

$$rr' = qq' + q_2 q'_2 + \mu(qq'_2 + q_2 q') + \omega[(q - q_2)\,q'_1 + q_1(q' + q'_2)].$$

On doit avoir d'abord

$$\mathrm{V}qq' + \mathrm{V}q_2q_2' = 0,$$
$$\mathrm{V}qq_2' + \mathrm{V}q_2q' = 0.$$

D'où, en ajoutant et retranchant,

$$\mathrm{V}(q+q_2)(q'+q_2') = 0,$$
$$\mathrm{V}(q-q_2)(q'-q_2') = 0$$

et, par suite,

$$q'+q_2' = x(\mathfrak{q}+\mathfrak{q}_2),$$
$$q'-q_2' = y(\mathfrak{q}-\mathfrak{q}_2),$$

où x et y sont des quantités vulgaires, $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}_2$, les quaternions conjugués de q et q_2.

Enfin l'on tire de ces deux dernières relations

$$q' = a\mathfrak{q} + b\mathfrak{q}_2,$$
$$q_2' = b\mathfrak{q} + a\mathfrak{q}_2,$$

en posant

$$a = \frac{x+y}{2}, \qquad b = \frac{x-y}{2}.$$

Nous avons écrit que le coefficient de μ a sa partie vectorielle nulle. Écrivons que ce coefficient lui-même est nul.

On trouve, en remplaçant q' et q_2' par leurs valeurs,

$$b(q\mathfrak{q} + q_2\mathfrak{q}_2) + a(q\mathfrak{q}_2 + q_2\mathfrak{q}) = 0.$$

Posons

$$\mathrm{A} = q\mathfrak{q} + q_2\mathfrak{q}_2,$$
$$\mathrm{B} = q\mathfrak{q}_2 + q_2\mathfrak{q}.$$

La relation précédente devient

$$Ab + Ba = 0.$$

Prenons

$$a = A, \qquad b = -B.$$

Les expressions de q et q'_1 deviennent

$$q' = Aq - Bq_2,$$
$$q'_2 = -Bq + Aq_2.$$

Il reste à déterminer q'_1, en annulant le coefficient de ω dans l'expression de rr' :

$$(q - q_2)\, q'_1 + q_1 (q' + q'_2) = 0.$$

Remplaçons q' et q'_2 par leurs valeurs. Il vient

$$(q - q_2)\, q'_1 + q_1 (A - B)\, (q + q_2) = 0,$$

ou, en multipliant à gauche par $q - q_2$ et remarquant que

$$(q - q_2)(q - q_2) = \Gamma^2 (q - q_2) = A - B,$$

on trouve

$$q'_1 = -(q - q_1)\, q_1 (q + q_2).$$

On a donc finalement

$$r' = Aq - Bq_2 + \mu (Aq_2 - Bq) - \omega (q - q_2)\, q_1 (q + q_2)$$
$$= (A - \mu B)\, (q + \mu q_2) - \omega (q - q_2)\, q_1 (q + q_2)$$

et

$$rr' = A^2 - B^2.$$

On vérifiera que, si l'on pose,

$$r = w + l + p,$$

on a

$$A = w^2 + l1 - p^2, \qquad B = 2(wTm - TLpd)$$

et que le résultat ci-dessus est concordant avec celui qui a déjà été trouvé.

Transformations par similitude. — Pour faire du calcul des triquaternions une analyse géométrique, il nous a suffi de constater qu'il comprenait des quantités susceptibles de représenter des déplacements et des déplacements accompagnés de symétrie, savoir des quantités de la forme

$$q + \omega q_1 \quad \text{avec} \quad q\mathfrak{q}_1 + q_1\mathfrak{q} = 0$$

et

$$\mu q_2 + \omega q_1 \quad \text{avec} \quad q\mathfrak{q}_2 + q_2\mathfrak{q} = 0.$$

Si r est une de ces expressions, l'équation de la transformation ponctuelle qu'elle représente s'écrira

$$\mu' = r\mu r^{-1},$$

où μ représente un point et μ' son transformé.

Il y a lieu de se demander s'il existe d'autres triquaternions r tels que l'expression rmr^{-1} représente un point, c'est-à-dire tels que l'équation ci-dessus représente une transformation ponctuelle de l'espace.

On trouve comme condition que le triquaternion r doit être de la forme

$$r = (\lambda + \mu\lambda')q + \omega q_1,$$

λ et λ' étant des quantités numériques et les quaternions q et q_1 satisfaisant

à la condition

$$q\mathfrak{q}_1 + q_1\mathfrak{q}.$$

Si l'on met le triquaternion r sous la forme $w + l + p$, la condition s'écrira

$$2wp - \mathrm{P}l^2 = 0.$$

Il reste à déterminer la nature des transformations ponctuelles représentées par les triquaternions de cette forme.

On a, dans ce cas,

$$wr = w^2 + wl + \tfrac{1}{2}\mathrm{P}l^2$$

ou, en posant

$$l = m + d,$$

$$wr = w^2 + wm + wd + md,$$

car on a

$$\mathrm{P}l^2 = md + dm = 2md,$$

en raison de

$$\mathrm{L}md = 0.$$

On peut donc écrire

$$wr = (w + m)(w + d),$$

formule qui décompose la transformation représentée par r en deux autres dont l'une, représentée par

$$w + d,$$

est une rotation autour de la droite d, et dont l'autre, représentée par

$$w + m,$$

a pour équation

$$(w^2 - m^2)\,\mu' = (w + m)\,\mu\,(w - m)$$

ou

$$\begin{aligned}(w^2 - m^2)\,\mu' &= w^2\mu + w(m\mu - \mu m) - m\mu m \\ &= w^2\mu + 2w\,\mathrm{L}m\mu - m^2\mu + 2m\,\mathrm{L}m\mu \\ &= (w^2 - m^2)\,\mu + 2(w - \mathrm{T}m)\,\mathrm{L}m\mu\end{aligned}$$

ou encore

$$(\mu' - \mu) = \frac{2}{w + \mathrm{T}m}\,\mathrm{L}m\mu.$$

C'est l'équation d'une transformation par homothétie ayant pour centre le point m et pour coefficient

$$\frac{w - \mathrm{T}m}{w + \mathrm{T}m}.$$

La transformation représentée par r peut donc être obtenue par la succession d'une rotation autour de la droite d et d'une homothétie par rapport au point m situé sur cette droite. C'est par suite une transformation par similitude.

On voit donc, en somme, que les transformations ponctuelles susceptibles d'être représentées par des triquaternions dans le mode de représentation que nous avons étudié sont les transformations par similitude.

Si l'on applique à un point m l'opération

$$r.r^{-1},$$

où r représente un triquaternion quelconque, on obtient une expression de la forme

$$m' + \omega y,$$

où m' est un point et y une quantité numérique.

On obtient d'ailleurs une expression de la même forme en appliquant la même opération à une expression de cette forme

$$m + \omega x,$$

de sorte que l'on peut considérer le système des triquaternions comme représentant le groupe de transformations dont l'équation serait

$$m' + \omega y = r\,(m + \omega x)\,r^{-1}.$$

L'élément variable est caractérisé par un point et une quantité numérique.

Nous ne voyons pas de signification géométrique simple à ces transformations.

Éléments linéaires. — La notion d'élément linéaire, telle que nous l'avons définie, est indépendante du calcul des triquaternions.

Elle est intéressante en soi et est susceptible de donner lieu à une Géométrie analogue à la Géométrie réglée et à la Géométrie des sphères.

C'est cette Géométrie ayant pour élément l'élément linéaire dont nous allons esquisser le principe.

Soit un élément linéaire

$$l = \mu x_0 + \rho + \omega \rho_1.$$

Il dépend de sept coordonnées homogènes, dont nous pouvons représenter l'ensemble par

$$x_0,\ \rho,\ \rho_1,$$

ou encore de six coordonnées ordinaires obtenues en divisant les composantes de ρ et ρ_1 par x_0.

Les complexes linéaires, considérés comme éléments de l'espace, forment une variété, dont l'équation est

$$x_0 = 0.$$

Dans cette variété linéaire, les droites (ou complexes spéciaux) forment

une quadrique dont l'équation est

$$S\rho\rho_1 = 0.$$

Si l'on considère les transformations linéaires homogènes

$$l' = \varphi(l),$$

conservant la variété linéaire des complexes linéaires et, dans cette variété, la quadrique des droites, ces transformations forment un groupe tout à fait analogue au groupe euclidien, les éléments linéaires correspondant aux points de l'espace ponctuel, la variété des complexes au plan de l'infini et la quadrique des droites au cercle imaginaire de l'infini.

On sait, d'après les travaux de Sophus Lie (¹), qu'un tel groupe conserve une expression différentielle quadratique, qui est, dans le cas qui nous occupe,

$$S.d\rho d\rho_1.$$

Cette expression n'est d'ailleurs que l'invariant différentiel correspondant à l'invariant simultané que présentent, par rapport au groupe, deux éléments linéaires quelconques, savoir

$$S.(\rho - \rho')(\rho_1 - \rho_1'),$$

où ρ et ρ_1 sont les coordonnées (non homogènes) de l'un des éléments; ρ' et ρ_1', celles de l'autre élément.

Cet invariant est l'analogue de la distance de deux points dans l'espace ponctuel.

Pour avoir une expression de cet invariant qui mette en évidence sa signification géométrique, remplaçons ρ_1 et ρ_1' par leurs valeurs en fonctions des vecteurs β et β' des points des éléments linéaires l et l', savoir

$$\rho_1 = \beta - V\rho\beta, \qquad \rho_1' = \beta' - V\rho'\beta'.$$

(¹) S. Lie, *Theorie der Transformations-Gruppen*, III^er Abschnitt; Teubner, Leipzig.

L'expression de l'invariant devient

$$S(\rho - \rho')(\beta - \beta') + S.\rho\rho'(\beta' - \beta),$$

ou

$$S(\rho - \rho' - V\rho\rho')(\beta - \beta').$$

Le premier facteur ne dépend que des axes des deux éléments et le second facteur est le vecteur allant du point β' au point β.

Contrairement à ce qui a lieu pour l'espace ponctuel, la nullité de cet invariant correspond à des conditions réelles, savoir l'orthogonalité des directions $\beta - \beta'$ et $\rho - \rho' - V\rho\rho'$.

En particulier, l'invariant sera nul pour deux éléments linéaires ayant le même point ($\beta = \beta'$) ou la même direction d'axe ($\rho = \rho'$).

Étant donné un élément linéaire ρ, β, à chaque direction donnée ρ' correspondra un plan passant par le point β et contenant les points β' donnant lieu aux éléments linéaires ρ', β', pour lesquels l'invariant sera nul.

La normale α à ce plan est liée à la direction ρ' par la relation

$$\rho - \rho' - V\rho\rho' = \alpha.$$

Deux complexes linéaires c et c', c'est-à-dire deux éléments linéaires situés dans la variété

$$x_0 = 0,$$

ont aussi un invariant par rapport au groupe considéré.

Cet invariant, qui a pour expression

$$\frac{S\rho\rho'_1 + S\rho_1\rho'}{\sqrt{\rho^2\rho'^2}}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{Pcc'}{Tc\,Tc'},$$

est le moment des deux complexes.

Il correspond, dans l'espace ponctuel, au cosinus de l'angle de deux directions.

L'invariant de deux éléments linéaires l et l' s'exprime très simplement si l'on donne aux points de ces deux éléments des masses égales à l'unité, c'est-à-dire si l'on suppose

$$x_0 = x'_0 = 1.$$

Cet invariant est en effet représenté alors par

$$\mathrm{P}(l' - l)^2,$$

où $l' - l$ est un complexe linéaire.

La condition

$$\mathrm{P}(l' - l)^2 = 0$$

exprime que $l' - l$ est une ligne droite, ce qui devait être puisque les lignes droites sont les analogues des points cycliques.

Moyennant l'emploi d'un élément pris comme origine (pour lequel on peut simplement choisir un point), un élément linéaire est déterminé par un complexe linéaire, comme, dans les mêmes conditions, un point l'est par un vecteur.

Nous n'insisterons pas davantage sur les principes d'une Géométrie des éléments linéaires, qui peut sans doute donner lieu à des développements intéressants, notamment dans leur application à la théorie des transformations de contact.

Remarquons en terminant qu'un élément linéaire l est caractéristique d'un groupe à un paramètre de transformationspar similitude, comme un complexe linéaire est caractéristique d'un groupe à un paramètre de déplacements sans déformation.

Soient μ le centre de la similitude, δ l'axe, 2θ l'angle de rotation, 2φ le logarithme du coefficient d'homothétie. Le triquaternion r, représentant la transformation, peut s'écrire, d'après ce que nous avons vu,

$$\begin{aligned} r &= \cos\theta \,\mathrm{Ch}\varphi + \delta \sin\theta \,\mathrm{Ch}\varphi - \mu \,\mathrm{Sh}\varphi\,(\cos\theta + \delta\sin\theta) \\ &= (\mathrm{Ch}\varphi - \mu\,\mathrm{Sh}\varphi)(\cos\theta + \delta\sin\theta). \end{aligned}$$

Si la transformation est infinitésimale, on a, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$r = 1 + \delta\theta - \mu\varphi.$$

L'équation de la transformation sera, dans ce cas,

$$m' = m + 2\mathrm{L}(\delta\theta - \mu\varphi)\, m.$$

La transformation infinitésimale, et par suite le groupe à un paramètre qu'elle détermine, est caractérisée par l'élément linéaire

$$\mu - \delta\frac{\theta}{\varphi}.$$

CHAPITRE II.

DÉPLACEMENTS SANS DÉFORMATION.

Paramètres et équations d'un déplacement. — En raison de l'origine du calcul des triquaternions, il est naturel d'en faire l'application à l'étude des mouvements des systèmes indéformables.

Un déplacement sans déformation est représenté par un biquaternion

$$r \equiv q + \omega q_1 \equiv \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3 + \omega(\beta_0 + i\beta_1 + j\beta_2 + k\beta_3)$$

satisfaisant à la condition

$$q\mathfrak{q}_1 + q_1\mathfrak{q} = 0, \qquad \mathrm{P}[r^2 - (\mathrm{L}r)^2] = 0,$$

ou

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$

La droite qui reste invariable dans le mouvement est l'axe du complexe

$$\mathrm{L}r \equiv i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3 + \omega(i\beta_1 + j\beta_2 + k\beta_3).$$

L'angle de rotation 2θ et la grandeur du glissement $2\eta_1$ sont donnés par les formules

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}, \qquad \eta_1 = -\frac{\beta_0}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}.$$

Supposons

$$\mathrm{T}r = 1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = 1,$$

et désignons par δ l'axe du mouvement pris avec un tenseur égal à 1.

Nous pouvons alors écrire r sous la forme

$$(1) \qquad r \equiv \cos\theta + \delta\sin\theta + \omega\delta\eta\cos\theta - \omega\eta\sin\theta.$$

En raison de la relation

$$\delta^2 = -1,$$

cette expression peut s'écrire

$$r \equiv (\cos\theta + \delta\sin\theta)(1+\omega\delta\eta_1).$$

Cette formule réalise la décomposition du déplacement en deux autres, qui sont la rotation autour de l'axe et la translation le long de cet axe.

Les deux facteurs sont commutatifs.

Si l'on fait le produit de deux expressions semblables ayant le même axe δ, on voit que les angles s'ajoutent, ainsi que les glissements η_1.

Il en résulte que, si les deux déplacements considérés présentent le même rapport $\frac{\eta}{\theta}$, ce rapport sera conservé dans le produit.

On peut donc réaliser le déplacement r par un mouvement hélicoïdal continu ayant pour axe δ et pour pas $\frac{\eta}{\theta}$.

Ce mouvement hélicoïdal est caractérisé par le complexe

$$\delta + \omega\delta\frac{\eta}{\theta}.$$

Un déplacement infinitésimal correspondra à des valeurs infiniment petites de θ et de η.

L'expression de r devient dans ce cas, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$1 + \delta\theta + \omega\delta\eta,$$

ou

$$1 + \left(\delta + \omega\delta\frac{\eta}{\theta}\right)\theta.$$

Le déplacement infinitésimal est caractérisé par le complexe $\delta + \omega\delta\frac{\eta}{\theta}$, et réciproquement tout complexe caractérise un déplacement infinitésimal.

Cherchons maintenant les expressions des effets des déplacements sur les points, les droites et les plans.

On aura les trois équations

$$m' = rmr^{-1}, \qquad d' = r\,dr^{-1}, \qquad p' = rpr^{-1}.$$

En appliquant au biquaternion r la formule donnant l'inverse d'un triquaternion, on trouve

$$r^{-1} = \cos\theta - \delta\sin\theta - \omega\eta(\sin\theta + \delta\cos\theta),$$

ce qui revient à changer le signe de θ et de η dans r.

Portons ces expressions de r et de r^{-1} dans l'équation

$$m' = rmr^{-1}. \tag{2}$$

On trouve, en effectuant les calculs,

$$(2)^a \qquad m' = m + 2\delta \mathrm{L}\,\delta m \sin^2\theta + \mathrm{L}\,\delta m \sin 2\theta + 2\omega\,\delta\eta\,\mathrm{T}m.$$

Mettons en évidence la projection $-\delta \mathrm{P}\,\delta m$ du point m sur l'axe δ. Pour cela décomposons m de la manière suivante :

$$m = -\delta^2 m = -\delta \mathrm{P}\,\delta m - \delta \mathrm{L}\,\delta m.$$

La formule précédente s'écrit alors

$$m' = -\delta \mathrm{P}\,\delta m - \delta \mathrm{L}\,\delta m \cos 2\theta + \mathrm{L}\,\delta m \sin 2\theta + 2\omega\,\delta\eta\,\mathrm{T}m,$$

ou, en multipliant le terme $\mathrm{L}\,\delta m \sin 2\theta$ par $-\delta^2$ ou 1,

$$(2)^b \qquad m' = -\delta \mathrm{P}\,\delta m + 2\omega\,\delta\eta\,\mathrm{T}m - (\cos 2\theta + \delta \sin 2\theta)\,\delta \mathrm{L}\,\delta m.$$

On voit facilement la signification de chaque terme de cette formule.

Le premier terme est la projection de m et par suite de m' sur l'axe.

Le dernier terme est le vecteur qui va de cette projection au point m après une rotation autour de δ d'un angle 2θ. Car l'expression $-\delta \mathrm{L}\,\delta m$, ou $\mathrm{L}\,\delta m \delta$, représente le vecteur qui va de cette projection au point m lui-même, et le biquaternion $\cos 2\theta + \delta \sin 2\theta$, appliqué comme multiplicateur à un vecteur perpendiculaire à δ, le fait tourner autour de cette droite de l'angle 2θ.

Enfin le second terme du second membre est le vecteur qui représente le trajet dû à la translation le long de l'axe.

Les droites et les plans donnent lieu à des formules analogues. C'est ainsi que l'on a

$$(3) \qquad d' = rdr^{-1}$$

ou, en supposant d'abord η nul,

$$(3)^a \qquad d' = d + 2\delta \mathrm{L}\,\delta d \sin^2\theta + \mathrm{L}\,\delta d \sin 2\theta.$$

Remarquant que l'on a

$$d = -\delta^2 d = -\delta(G\delta d + P\delta d + L\delta d),$$

il vient

$$d' = -\delta G\delta d - \delta P\delta d - (\delta\cos 2\theta - \sin 2\theta)\, L\delta d,$$

et enfin, en se servant encore de $\delta^2 = -1$,

$$(3)^b \qquad d' = -\delta G\delta d - \delta P\delta d - (\cos 2\theta + \delta \sin 2\theta)\,\delta L\delta d.$$

Cette formule (qui ne représente que la rotation) s'interprète facilement.

En effet, la décomposition de d par rapport à δ donne lieu à trois termes :

— $\delta G\delta d$, droite coïncidant en position avec δ ;

— $\delta P\delta d$, vecteur ayant la même direction que δ ;

— $\delta L\delta d$, complexe, dont l'axe rencontre δ et lui est perpendiculaire.

La droite et le vecteur dirigés suivant δ restent invariables pendant le mouvement, et c'est uniquement sur le complexe $-\delta L\delta d$ que s'exerce la rotation, comme l'indique la formule $(3)^b$.

Si η_1 n'est pas nul, on doit ajouter aux seconds membres des formules $(3)^a$ et $(3)^b$ l'expression

$$2\omega L\delta d'\eta_1.$$

Enfin on a de même

$$(4) \qquad p' = rpr^{-1}$$

$$(4)^a \qquad p' = p + 2\delta P\delta p \sin 2\theta + P\delta p \sin 2\theta + 2\omega L\delta p\eta.$$

On trouverait, comme dans les cas précédents,

$$(4)^b \qquad p' = -\delta L\delta p - (\cos 2\theta + \delta \sin 2\theta)\,\delta P\delta p + 2P\omega\delta p\eta_1.$$

La formule

$$p = -\delta^2 p = -\delta \mathrm{L}\delta p - \delta \mathrm{P}\delta p$$

représente la décomposition du plan p en deux plans passant par le point d'intersection de δ et de p. L'un, $-\delta \mathrm{L}\delta p$, est perpendiculaire à δ, l'autre, $-\delta \mathrm{P}\delta p$, passe par δ et par l'intersection de p et de $-\delta \mathrm{L}\delta p$.

Dans une rotation de 2θ autour de δ, le plan composant perpendiculaire à δ ne bouge pas, et l'autre prend une nouvelle position représentée par

$$-(\cos 2\theta + \delta \sin 2\theta)\,\delta \mathrm{P}\delta p.$$

Quant au dernier terme de $(4)^b$ $2\mathrm{P}\omega\delta p\tau_1$, il représente l'effet de la translation sur le plan p.

Ces formules se simplifient considérablement dans le cas d'un déplacement infinitésimal.

Si dans les formules $(2)^a$, $(3)^a$, $(4)^a$ l'on suppose θ et τ_1 infiniment petits, en négligeant les infiniment petits du second ordre et en posant

$$c = 2(\delta\theta + \omega\delta\tau_1),$$

elles deviennent

$$(5) \qquad \begin{cases} m' = m + \mathrm{L}cm, \\ d' = d + \mathrm{L}cd, \\ p' = p + \mathrm{P}cp. \end{cases}$$

Ainsi, dans le groupe des déplacements, les transformations infinitésimales sont caractérisées par des complexes linéaires.

On a pu remarquer que nous avons étendu le sens attribué généralement au mot *complexe linéaire*.

Tandis qu'il désigne habituellement l'ensemble ou variété des droites dont les coordonnées satisfont à une équation linéaire, nous lui faisons désigner toute notion géométrique caractérisée par cette variété, évitant

ainsi l'introduction de termes nouveaux tels que *vis, torseur, moteur, dyname.*

A la vérité, ces termes ont une signification qui ajoute à la notion géométrique du complexe celle du tenseur.

Si cette raison était suffisante pour créer des termes nouveaux, il faudrait aussi donner des noms spéciaux aux points affectés de masses et aux plans affectés de coefficients numériques.

Il nous a paru que la possibilité, purement rationnelle d'ailleurs, d'une équivoque ne justifiait pas l'emploi de termes très différents pour désigner des notions presque identiques.

Nous avons donc, comme on l'a déjà vu, désigné simplement par *points, plans, droites, complexes,* ces divers éléments géométriques affectés de coefficients numériques.

Le mot *droite* désignera aussi bien le segment dirigé et limité dont elle est le support que le complexe spécial qu'elle détermine.

Il ne paraît pas plus naturel, en effet, d'employer des termes différents pour la droite et le complexe spécial que de changer la dénomination du plan, suivant qu'on le considère comme ensemble de points, comme ensemble de droites ou comme élément de l'espace.

Revenons au déplacement infinitésimal représenté par les équations (5).

La première de ces équations montre que, en chaque point m, le déplacement $m' - m$ est représenté par un vecteur $\mathrm{L}cm$. Nous verrons que ce vecteur $\mathrm{L}cm$ est perpendiculaire au plan polaire du point m par rapport au complexe c.

Les déplacements finis présentent une propriété analogue.

En effet, prenons l'équation $(2)^b$ sous la forme

$$m' = -(1 + 2\omega\delta\eta)\,\delta\mathrm{P}\delta m - (\cos 2\theta + \delta \sin 2\theta)\,\delta\mathrm{L}\delta m.$$

Remarquant que

$$m = -\delta\mathrm{P}\delta m - \delta\mathrm{L}\delta m,$$

on a

$$\frac{m+m'}{2} = -(1+\omega\delta\eta)\delta P\delta m - \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta+\delta\sin 2\theta)\delta L\delta m.$$

Formons $L.\gamma\frac{m+m'}{2}$, où l'on pose

$$\gamma = Lr = \delta\sin\theta + \omega\delta\eta\cos\theta.$$

Remarquant que, dans le développement du produit $L.\gamma\frac{m+m'}{2}$, $\delta\sin\theta$ ne donne de résultat qu'avec le terme en $\delta L\delta m$, et $\delta\cos\theta$ avec le terme en $\delta P\delta m$, on trouve

$$L\gamma\frac{m+m'}{2} = -\omega\delta\eta\cos\theta\delta P\delta m - \frac{1}{2}L.\delta\sin\theta(1+\cos 2\theta+\delta\sin 2\theta)\delta L\delta m$$
$$= -\cos\theta\left[\omega\delta\eta\delta P\delta m + \frac{1}{2}\cos\theta(\cos 2\theta - 1 + \delta\sin 2\theta)\delta L\delta m\right].$$

Calculons d'autre part $m' - m$.

$$m' - m = -2\omega\delta\eta\delta P\delta m - (\cos 2\theta - 1 + \delta\sin 2\theta)\delta L\delta m$$
$$= \frac{2}{\cos\theta}L.\gamma\frac{m+m'.}{2}$$

On voit donc que la direction $m' - m$ de la corde déterminée par les points m et m' est liée au point milieu $\frac{m+m'}{2}$ de cette corde de la même manière que, dans le déplacement infinitésimal, un point est lié à la direction de son déplacement. Autrement dit, cette corde est perpendiculaire au plan polaire de $\frac{m+m'}{2}$ par rapport au complexe γ.

La relation précédente peut être trouvée beaucoup plus simplement en partant de la formule (2).

Cette formule peut s'écrire

$$m'r = rm.$$

Prenons r sous la forme

$$w + \gamma + \omega w_1.$$

La formule précédente devient

$$wm' + m'\gamma + \omega w_1 m' = wm + \gamma m + \omega w_1 m,$$

et, en prenant l'élément linéaire des deux membres,

$$wm' - \mathrm{L}\gamma m' = wm + \mathrm{L}\gamma m \tag{6}$$

ou

$$w(m' - m) = \mathrm{L}.\gamma(m + m'),$$

formule conforme à celle déjà trouvée.

Remplaçons dans la formule (6) w et γ par leurs valeurs.

$$\left.\begin{aligned} &\cos\theta m' - \mathrm{L}\delta m' \sin\theta - \omega\delta\eta \mathrm{T} m' \cos\theta \\ &= \cos\theta m + \mathrm{L}\delta m \sin\theta + \omega\delta\eta \mathrm{T} m \cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{6}^{bis}$$

C'est la traduction en triquaternions des formules de la page 12.

Décompositions diverses d'un déplacement. — Le calcul des triquaternions permet de décomposer un déplacement en des rotations suivant deux axes dont l'un est donné.

Soit r un biquaternion représentant un déplacement, c'est-à-dire satisfaisant à la condition habituelle

$$\mathrm{q}q_1 + \mathrm{q}_1 q = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{P}.[r^2 - (\mathrm{L}r)^2] = 0.$$

Une rotation autour d'une droite d est représentée par un biquaternion de la forme

$$w + d,$$

où w est une quantité numérique ordinaire.

Supposons r et d donnés et cherchons à écrire r sous la forme

$$r = n(w + d),$$

n représentant une rotation.

On a

$$n = r\,(w+d)^{-1}$$

ou

$$(w^2 - d^2)\,n = r\,(w - d).$$

Les biquaternions r et $w - d$ satisfaisant tous deux à la condition habituelle, il en sera de même de leur produit, et il suffira d'écrire que n représente une rotation, ce qui s'exprime

$$\mathrm{P}n = 0 \qquad \text{ou} \qquad w\,\mathrm{P}r - \mathrm{P}rd = 0,$$

d'où

$$w = \frac{\mathrm{P}rd}{\mathrm{P}r}.$$

Moyennant cette valeur, on a pour n une expression satisfaisant à la condition imposée.

Dans le cas où

$$\mathrm{P}r = 0,$$

c'est-à-dire si le déplacement est une rotation, il faut, pour que le problème soit possible, que

$$\mathrm{P}rd = 0, \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{P}\,.\,\mathrm{L}r\,.\,d = 0,$$

relation qui exprime que d rencontre l'axe de la rotation ou lui est parallèle. Car dans ce cas $\mathrm{L}r$ est une droite.

Il résulte de la possibilité de la décomposition d'un déplacement en deux rotations dont l'un des axes est donné, que le déplacement d'une droite d peut être obtenu par une simple rotation. Car la formule (3)

de la page 43 s'écrira

$$(w^2 - d^2)\, d' = n(w + d)\, d(w - d)\, n^{-1}$$
$$= (w^2 - d^2)\, n d n^{-1}$$

ou

$$d' = n d n^{-1}.$$

On peut aussi décomposer un déplacement en deux *renversements*, c'est-à-dire en deux rotations d'un angle π; autrement dit, on peut décomposer un biquaternion r représentant un déplacement en un produit de deux droites.

Posons

$$r = dd'.$$

On a

$$dr = d^2 d'.$$

Le second membre étant une droite, nous aurons l'équation du lieu de d en écrivant que le premier membre représente aussi une droite.

Posons

$$r = w + \gamma + \omega w_1.$$

On a

$$dr = wd + \mathrm{G}d\gamma + \mathrm{P}d\gamma + \mathrm{L}d\gamma + \omega w_1 d.$$

On doit d'abord avoir

$$\mathrm{G}d\gamma = 0, \qquad \mathrm{P}d\gamma = 0,$$

c'est-à-dire que d appartient au complexe γ et est rectangulaire avec l'axe de ce complexe. La droite d, d'après une propriété connue des complexes, appartient donc à la congruence des droites rencontrant l'axe de γ et perpendiculaires à cet axe.

Moyennant ces conditions, le biquaternion dr représentera un com-

plexe. Pour qu'il représente une droite, il faut que l'on ait

$$\mathrm{P}(dr)^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{P}(wd + d\gamma + \omega w_1 d)^2 = 0,$$

$$\mathrm{P}\left[(w + \omega w_1)^2 d^2 + (d\gamma)^2 + 2(w + \omega w_1) d^2\gamma\right] = 0$$

ou

$$2ww_1 d^2 - d^2 \mathrm{P}\gamma^2 = 0,$$

condition toujours remplie, car la relation

$$2ww_1 - \mathrm{P}\gamma^2 = 0$$

est la condition que doit réaliser r pour représenter un déplacement.

La droite d' est déterminée par la formule

$$d^2 d' = dr = (w + \omega w_1) d + d\gamma.$$

C'est aussi une droite qui rencontre l'axe de γ et lui est perpendiculaire.

Pour déterminer la position relative des droites d et d', supposons leurs tenseurs égaux à l'unité et prenons le biquaternion r sous la forme (1) donnée au commencement de ce Chapitre. On a

$$\mathrm{G}dd' = \cos\theta, \qquad \mathrm{P}dd' = -\eta \sin\theta$$

ou, en désignant par θ' l'angle des deux droites et par e leur plus courte distance,

$$-\cos\theta' = \cos\theta, \qquad e\sin\theta' = \eta\sin\theta,$$

relations qui expriment que les droites font entre elles un angle égal à $\varpi - \theta$ et ont une distance égale à η, ou encore que l'on passe de l'axe d' du premier renversement à l'axe d du second par une rotation positive d'angle θ autour de l'axe de r et par une translation également

positive de valeur η_1 le long de cet axe. Rappelons que θ est le demi-angle de rotation du déplacement r et η_1 le demi-glissement.

On peut aussi obtenir une rotation au moyen de deux transformations par symétrie planaire, comme le montre la formule

$$p_2 p_1 = \cos\theta + \delta \sin\theta.$$

On obtient une translation, si les deux plans sont parallèles :

$$p_2 = p_1 + \omega w, \qquad p_2 p_1 = -1 + \omega w p_1.$$

Nous ne nous étendrons pas davantage sur la théorie géométrique des déplacements, ce Chapitre et les suivants n'ayant pas d'autre but que celui de donner une idée de la simplicité analytique que le calcul des triquaternions introduit dans quelques questions classiques.

Mouvement continu d'un corps solide. — Nous allons appliquer le calcul des triquaternions à l'étude du mouvement d'un système indéformable eu égard au temps, en suivant l'ordre habituel d'exposition, mais en allant, comme on verra, beaucoup plus rapidement, grâce à la simplicité et à la lucidité des formules.

En indiquant la dérivation par rapport au temps par un accent, on a, d'après les formules (5) du présent Chapitre,

$$(7) \qquad m' = \mathrm{L}cm, \qquad d' = \mathrm{L}cd, \qquad p' = \mathrm{L}cp,$$

c étant un complexe linéaire, que l'on peut appeler le *complexe instantané* du mouvement.

L'expression de l'accélération du point m est évidemment

$$(8) \qquad m'' = \mathrm{L}c'm + \mathrm{L}cm' = \mathrm{L}c'm + \mathrm{L}.c\mathrm{L}cm.$$

On peut, dans le second terme, remplacer c par son axe δ.

En effet, on peut poser

$$c = \delta + \omega\delta\eta,$$

η étant une quantité numérique. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{L}.c\mathrm{L}cm &= \mathrm{L}.(\delta + \omega\delta\eta)\mathrm{L}(\delta + \omega\delta\eta)m \\ &= \mathrm{L}.\delta\mathrm{L}\delta m + \eta\,\mathrm{L}.\omega\delta\mathrm{L}\delta m + \eta\,\mathrm{L}.\delta\mathrm{L}\omega\delta m + \eta^2\mathrm{L}.\omega\delta\mathrm{L}\omega\delta m. \end{aligned}$$

Le second et le quatrième terme sont nuls, car le produit d'un vecteur ($\mathrm{L}\delta m$ ou $\mathrm{L}\omega\delta m$) par une expression contenant le facteur ω est nul.

Le troisième terme est également nul, car il peut s'écrire

$$\eta\mathrm{L}.\delta\omega\delta\mathrm{T}m = \eta\mathrm{T}m\mathrm{L}\omega\delta^2 = 0.$$

On a donc pour l'expression de l'accélération

$$(8)^{bis} \qquad m'' = \mathrm{L}c'm + \mathrm{L}\delta\mathrm{L}\delta m.$$

On sait que le vecteur $\mathrm{L}.\delta\mathrm{L}\delta m$ peut être exprimé comme dérivée d'une fonction de point, qui est le carré de la longueur du vecteur $\mathrm{L}\delta m$, si toutefois nous prenons le tenseur de m égal à l'unité.

Soit H cette fonction de m. En se servant de l'opération quaternionienne définie par la formule

$$\nabla = i\frac{\delta}{\partial x} + j\frac{\delta}{\partial y} + k\frac{\delta}{\partial r},$$

on écrira le second terme du second membre de (8)

$$\mathrm{L}.\delta\mathrm{L}\delta m = \nabla\mathrm{H}.$$

La formule (8) ou $(8)^{bis}$ conduit naturellement au thoérème de Coriolis.

Soit v le vecteur représentant la vitesse relative du point m par rapport

à un système indéformable dont le mouvement a pour complexe instantané c. On a

$$m' = \mathrm{L}cm + v,$$

d'où

$$m'' = \mathrm{L}c'm + \mathrm{L}cm' + v' = \mathrm{L}c'm + \mathrm{L}.c\mathrm{L}cm + \mathrm{L}cv + v'.$$

L'ensemble des deux premiers termes représente l'accélération J_e du point du système indéformable qui coïncide à l'instant considéré avec le point m.

Exprimons v' en fonction de l'accélération relative du point m, J_r.

Le vecteur $v + v'dt$ représente dans l'espace la vitesse relative du point m à l'époque $t + dt$, et par suite représente ce que devient le vecteur $v + \mathrm{J}_r dt$ par l'effet du déplacement infinitésimal $1 + c\,dt$, c'est-à-dire que l'on a

$$v + v'\,dt = v + \mathrm{J}_r dt + \mathrm{L}\,c\,(v + \mathrm{J}_r dt)\,dt,$$

d'où, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$v' = \mathrm{J}_r + \mathrm{L}cv.$$

La formule donnant l'expression de m'' devient

$$m'' = \mathrm{J}_e + \mathrm{J}_r + 2\,\mathrm{L}cv = \mathrm{J}_e + \mathrm{J}_r + 2\,\mathrm{L}\delta v,$$

en désignant par δ l'axe de rotation du système indéformable.

Cette formule exprime le théorème de Coriolis.

Un problème important de la cinématique des systèmes indéformables consiste dans la question suivante :

Étant donnée l'expression du complexe instantané en fonction du temps, déterminer la position du système à un instant donné.

Sans vouloir aborder la question de l'intégration de l'équation différentielle qui se présente, nous allons chercher cette équation différentielle, dont la forme est remarquablement simple.

La position du système indéformable sera bien déterminée par le biquaternion r représentant le déplacement qui amènerait le système d'une position fixe arbitrairement choisie à sa position actuelle.

Cherchons l'équation différentielle à laquelle satisfait le biquaternion r.

Remarquons d'abord qu'en vertu de la relation à laquelle doivent satisfaire les biquaternions représentant les déplacements sans déformation, le biquaternion r est de la forme

$$r = w + \gamma + \frac{\mathrm{P}\gamma^2}{2w} = w + \gamma + \omega x.$$

où w et x sont des quantités numériques et γ un complexe.

Si m_0 représente la position initiale d'un point m, on a

$$m = r m_0 r^{-1},$$

d'où

$$m' = r' m_0 r^{-1} + r m_0 (r^{-1})',$$

en représentant la dérivation par rapport au temps par l'accentuation du symbole de la fonction.

Cherchons l'expression de $(r^{-1})'$. On a

$$r r^{-1} = 1,$$

d'où

$$r' r^{-1} + r(r^{-1})' = 0,$$

et, en multipliant à gauche par r,

$$(r^{-1})' = - r r' r^{-1}.$$

Portant dans l'expression de m, on trouve

$$m' = r' m_0 r^{-1} - r m_0 r^{-1} r' r^{-1},$$

et, en remplaçant m_0 par son expression en fonction de m,

$$m' = r'r^{-1}m - mr'r^{-1}.$$

On a

$$\begin{aligned}(w^2 - G\gamma^2)r'r^{-1} &= (w' + \gamma' + \omega x')(w - \gamma + \omega x)\\ &= ww' - G\gamma\gamma' + w\gamma' - w'\gamma + \omega x\gamma' - \omega x'\gamma - P\gamma'\gamma\\ &\qquad + \omega(wx' + xw').\end{aligned}$$

La partie planaire

$$\omega(wx' + xw') - P\gamma'\gamma$$

est la dérivée de l'expression

$$\omega wx - \tfrac{1}{2}P\gamma^2,$$

qui est nulle constamment par hypothèse.

On a donc

$$Pr'r^{-1} = 0,$$

et l'expression de m' devient

$$m' = Lr'r^{-1}.m - mLr'r^{-1} = 2L.Lr'r^{-1}.m,$$

formule qui montre que le complexe instantané du mouvement c a pour expression

$$c = 2Lr'r^{-1}. \tag{9}$$

On peut simplifier encore cette formule en soumettant r à la condition d'avoir un tenseur égal à l'unité. Cette condition s'écrit

$$w^2 - G\gamma^2 = 1,$$

d'où

$$ww' - G\gamma\gamma' = 0$$

ou

$$Gr'r^{-1} = 0.$$

On peut donc écrire alors

$$c = 2r'r^{-1}. \tag{10}$$

Telle est l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire r.

Elle a la forme d'une équation différentielle dont la résolution n'exigerait qu'une quadrature.

Mais il est facile de s'assurer qu'en réalité le second membre $2r'r^{-1}$ n'est pas une différentielle exacte.

En mettant l'équation (10) sous la forme

$$2r' = cr, \tag{10}^{bis}$$

on voit que, si l'on connaît huit solutions de cette équation $r_1, r_2, \ldots, r_8$, la solution générale pourra s'écrire

$$r = \sum A_i r_i,$$

où les coefficients A_i représentent huit constantes d'intégration soumises à deux relations résultant des conditions auxquelles doit satisfaire r :

$$P(r^2 - L^2 r) = 0, \qquad T^2 r = 1.$$

D'ailleurs, si ces deux relations sont satisfaites pour une valeur de t, elles le seront pour toute autre valeur.

Soit r une solution de l'équation (10). La solution générale sera

$$r_1 = r r_0,$$

r_0 étant un biquaternion constant et arbitraire satisfaisant aux deux conditions admises pour r.

On a en effet

$$r_1' = r' r_0$$
$$r_1^{-1} = r_0^{-1} r^{-1},$$

d'où

$$2 r_1' r_1^{-1} = 2 r' r^{-1} = c.$$

Si le complexe c est constant, le mouvement est un mouvement hélicoïdal uniforme, et une solution de (10) est

$$r = \cos\theta + \delta \sin\theta + \omega \delta \eta \cos\theta - \omega \eta \sin\theta,$$

où δ est une droite fixe, η et θ étant proportionnels au temps et déterminés par la relation

$$c = 2\delta(\theta' + \omega\eta').$$

Il peut être commode de généraliser la définition du logarithme en posant

$$\frac{d}{dt}\log r = \delta(\theta' + \omega\eta')$$
$$\log r = \delta(\theta' + \omega\eta')t,$$

ou encore

$$r = e^{\delta(\theta' + \omega\eta')t} = e^{\frac{c}{2}t},$$

de sorte que la solution générale de l'équation (10), dans le cas extrêmement simple où c est constant, prendrait la forme

$$r = e^{\frac{c}{2}t} r_0,$$

r_0 étant le biquaternion de tenseur un représentant le déplacement qui amènerait le corps solide d'une position arbitrairement choisie à celle qu'il occupe à l'époque $t = 0$.

Remarquons enfin la formule

$$e^{\delta(\theta+\omega\eta)} = \delta^{\frac{2}{\pi}(\theta+\omega\eta)}$$

résultant de

$$e^{\delta\frac{\pi}{2}} = \delta.$$

Au lieu du complexe instantané du mouvement c, on peut se donner le complexe c_1 qui, par le déplacement r, viendrait coïncider avec c. Autrement dit, on peut se donner la position du complexe instantané par rapport au système mobile.

L'équation différentielle présente une forme analogue à celle obtenue déjà. On a en effet

$$c_1 = r^{-1} cr = 2 r^{-1} r'.$$

Si l'axe de c a une direction constante dans l'espace, c'est-à-dire si ωc est constant, il en sera de même de ωc_1, car on voit, en se reportant à l'expression développée de $r' r^{-1}$, que l'on a

$$\omega r' r^{-1} = \omega r^{-1} r'.$$

Les propriétés représentées par les formules que nous avons successivement rencontrées dans ce Chapitre sont toutes bien connues. La démonstration de ces propriétés par le calcul des triquaternions n'a pas d'autre but que de mettre en évidence l'aptitude de ce calcul à être utilisé comme procédé d'analyse.

Nous devons mentionner ici que, dans les questions relatives au mouvement des systèmes indéformables, certaines formules ne comprenant que des expressions biquaternioniennes peuvent avoir été déjà données sous une forme très voisine de la nôtre par les auteurs qui ont traité du calcul des biquaternions (1).

(1) Mac'Aulay, *Octonions;* London, Clay and sons, 1899. — Buckeim, *Mémoire sur les biquaternions* (*American Journal*, 1885).

Équilibre et dynamique des corps solides. — On doit s'attendre à ce que les équations fondamentales de l'équilibre et de la dynamique d'un corps indéformable se présentent sous une forme particulièrement simple.

Établissons d'abord la condition d'équilibre d'un système de forces appliquées à un corps solide.

Représentons les forces par les expressions par lesquelles nous avons fait représenter les droites.

Soit f une force appliquée à un point μ du corps solide.

Un déplacement virtuel du corps solide sera caractérisé par un complexe c de tenseur infiniment petit, et le travail virtuel de la force aura pour expression

$$-\mathrm{P}.f\mathrm{L}c\mu = -\mathrm{P}.f\mu\mathrm{L}\mu c = -\mathrm{P}.(f\mu^2 c - f\mu\mathrm{P}\mu c).$$

Les droites $f\mu$ et $\mathrm{P}\mu c$ étant concourantes, on a

$$\mathrm{P}.f\mu\mathrm{P}\mu c = 0,$$

et le travail de la force f a finalement pour expression

$$-\mathrm{P}cf.$$

Le travail virtuel de toutes les forces a donc pour valeur

$$-\mathrm{P}c\sum,$$

et la condition pour que ce travail soit nul, quel que soit c, s'écrira

$$\sum f = 0.$$

La condition d'équivalence de deux systèmes de forces est évidemment

$$\sum f = \sum f'.$$

Un système de forces appliquées à un corps solide est donc caractérisé par ce que nous avons appelé un *complexe*.

L'équation du mouvement d'un corps solide s'obtient en écrivant l'équivalence entre les forces extérieures et le système de segments représentant, en chaque point, en grandeur et en direction, l'accélération du point multipliée par sa masse.

On voit facilement que ce segment (ou droite) peut être considéré comme la dérivée par rapport au temps d'un segment e passant par le point considéré et représentant la quantité de mouvement de ce point, de sorte que l'équation du mouvement sera

$$\sum \frac{de}{dt} = \sum f,$$

ou

$$\frac{d}{dt} \sum e = \sum f.$$

Le complexe Σf, que nous désignerons par λ, pourrait être appelé le *complexe moteur*, et le complexe Σe la *quantité de mouvement* du corps solide.

Il reste à exprimer cette quantité de mouvement η_1 en fonction du complexe instantané ε.

La quantité de mouvement η_1 se compose d'une droite (ou segment) passant par le centre de gravité et représentant la quantité de mouvement de translation et d'un vecteur représentant le moment résultant des quantités de mouvement par rapport au centre de gravité.

On exprime facilement ces deux termes en fonction de ε, et l'on a

$$\eta_1 = \Phi(\varepsilon),$$

Φ étant une fonction linéaire homogène de ε, qui dépend de la masse du corps solide, de la position de son centre de gravité et de celle de l'ellipsoïde central d'inertie.

On a

$$\eta_1' = \Phi(\varepsilon') + \Phi'(\varepsilon).$$

Cherchons l'expression de $\Phi'(\varepsilon)$.

Appliquons le déplacement infinitésimal $1 + \varepsilon\, dt$ à la transformation

$$c' = \Phi(c).$$

Elle devient

$$c_1' - \mathrm{L}\varepsilon c_1'\, dt = \Phi(c_1) - \Phi(\mathrm{L}\varepsilon c_1)\, dt$$

ou, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$c_1' = \Phi(c_1) + [\mathrm{L}.\varepsilon\Phi(c_1) - \Phi(\mathrm{L}\varepsilon c_1)]\, dt.$$

On voit donc que l'on a

$$\Phi'(c) = \mathrm{L}\varepsilon\Phi(c) - \Phi(\mathrm{L}\varepsilon c)$$

et

$$\Phi'(\varepsilon) = \mathrm{L}\varepsilon\Phi(\varepsilon).$$

On a donc

$$\eta_1' = \Phi(\varepsilon') + \mathrm{L}\varepsilon\Phi(\varepsilon),$$

et, si l'on prend pour inconnue le biquaternion r de tenseur un représentant le déplacement qui amènerait le corps solide d'une position fixe arbitrairement choisie à la position à l'époque t, les équations du mouvement pourront s'écrire

$$(11) \qquad 2\, r' r^{-1} = \varepsilon, \qquad \Phi(\varepsilon') + \mathrm{L}\varepsilon\Phi(\varepsilon) = \Sigma f,$$

où l'opérateur Φ est fonction de r.

On peut aussi prendre pour variable auxiliaire η_1 au lieu de ε, et les équations du mouvement prennent alors la forme

$$2\, r' r^{-1} = \Phi^{-1}(\eta_1), \qquad \eta_1' = \Sigma f = \lambda.$$

Mais, sauf dans des cas particuliers (corps de révolution, par exemple), Φ ne s'exprime pas très simplement en fonction de r.

On est alors conduit, pour éviter cette difficulté, à introduire dans les équations des éléments dont la position soit déterminée par rapport au corps solide.

Si l'on désigne par ε_1 et λ_1 les complexes qui seraient amenés par le déplacement r à coïncider avec ε et λ, les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$(12) \qquad 2r^{-1}r' = \varepsilon_1, \qquad \Phi_1(\varepsilon_1') + L\varepsilon_1\,\Phi_1(\varepsilon_1) = \lambda_1,$$

où Φ_1 représente la fonction qui deviendrait Φ par le déplacement r.

La seconde de ces équations est l'extension au cas d'un corps solide libre des équations d'Euler relatives à un corps solide assujetti à tourner autour d'un point fixe.

On trouverait facilement les intégrales connues dans les cas intégrables.

Dans le cas d'un corps complètement libre, la décomposition du mouvement suivant le centre de gravité ôte de l'intérêt à l'intervention du calcul des triquaternions. Mais celui-ci ne paraît pas être sans quelque utilité pour l'étude du mouvement d'un corps solide soumis à des liaisons géométriques.

CHAPITRE III.

COMPLEXES LINÉAIRES.

Équation d'un complexe. Décompositions diverses. — Un complexe linéaire est défini *l'ensemble des droites dont les coordonnées satisfont à une équation linéaire scalaire.*

L'expression la plus générale d'une quantité scalaire fonction linéaire homogène d'une droite

$$d = \rho + \omega\rho_1$$

est évidemment

$$\mathrm{P}\gamma d,$$

où γ est une expression de la forme

$$\gamma = \alpha + \omega\beta.$$

L'équation d'un complexe est donc

$$\mathrm{P}\gamma d = 0,$$

de sorte qu'un complexe linéaire est caractérisé, à un facteur arbitraire près, par une expression de la forme ci-dessus.

Si l'on a

$$\mathrm{P}\gamma^2 = 0,$$

γ représentera un complexe spécial, qu'il n'y a aucun motif de distinguer de la droite qui le détermine d'une manière univoque. C'est pour cela que nous avons considéré la droite comme un cas particulier du complexe.

L'expression γ, si l'on fait entrer en considération son tenseur, représente un système de segments.

Les divers modes de décomposition d'un système de segments, si usités en Mécanique, s'opèrent très simplement au moyen des triquaternions.

C'est ainsi que l'on a, en désignant par μ, ϖ et δ un point, un plan et une droite de tenseur égal à l'unité,

$$\gamma = \mu^2\gamma = \mu\mathrm{P}\mu\gamma + \mu\mathrm{L}\mu\gamma = \mu\mathrm{P}\mu\gamma + \mathrm{L}\gamma\mu.$$
$$\gamma = -\varpi^2\gamma = -\varpi\mathrm{L}\varpi\gamma - \varpi\mathrm{P}\varpi\gamma.$$
$$\gamma = -\delta^2\gamma = -\delta\mathrm{G}\delta\gamma - \delta(\mathrm{P}\delta\gamma + \mathrm{L}\delta\gamma).$$

Ces décompositions sont généralement à employer lorsqu'il s'agit de

mettre en évidence les propriétés d'un complexe par rapport à un point, un plan ou une droite.

Les formules ci-dessus s'interprètent facilement.

La première représente la décomposition de γ en une droite $\mu \mathrm{P} \mu\gamma$ passant par μ et un vecteur $\mathrm{L}\gamma\mu$ qui représente le moment du système de segments par rapport au point μ ou encore la vitesse du point μ dans un mouvement dont les circonstances instantanées seraient représentées par γ.

La seconde formule représente la décomposition de γ en deux droites, dont l'une, $-\varpi \mathrm{L}\varpi\gamma$, est perpendiculaire à ϖ, et dont l'autre, $-\varpi \mathrm{P}\varpi\gamma$, est située dans ce plan.

La troisième formule décompose γ suivant la droite δ et un complexe, qui n'est généralement pas une droite.

Il y a intérêt à déterminer la décomposition de γ suivant deux droites dont l'une coïncide en position avec δ. Posons pour cela

$$d = x\delta + y\gamma,$$

et écrivons que le second membre représente une droite

$$\mathrm{P}d^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2x\mathrm{P}\delta\gamma + y\,\mathrm{P}\gamma^2 = 0.$$

Cette équation détermine le rapport $\frac{x}{y}$, et l'on a pour d une infinité de solutions ne différant entre elles que par le tenseur.

On peut observer que cette décomposition d'un complexe en deux droites dont l'une est donnée permet de réduire à une rotation le déplacement infinitésimal d'une droite, donné par la seconde des formules (5) de la page 45.

Deux droites sont dites *conjuguées par rapport à un complexe* γ lorsqu'on peut choisir leurs tenseurs de manière que l'on ait

$$\gamma = d + d'. \tag{1}$$

Toute droite δ appartenant au complexe γ et rencontrant une droite d rencontre aussi sa conjuguée d'. Car l'on a

$$\mathrm{P}\delta d' = \mathrm{P}\delta\gamma - \mathrm{P}\delta d = 0.$$

Réciproquement toute droite rencontrant deux conjuguées fait partie du complexe.

Tout plan p parallèle à deux droites conjuguées d et d' est parallèle à l'axe du complexe.

Car l'on a

$$\mathrm{P}.p\omega\gamma = \mathrm{P}.p\omega d + \mathrm{P}.p\omega d' = 0,$$

formule qui exprime que le plan p contient le vecteur $\omega\gamma$, c'est-à-dire est parallèle à l'axe de γ.

Toute droite d appartenant au complexe coïncide avec sa conjuguée et réciproquement. Car on a, pour l'expression de la conjuguée d',

$$d' = d\mathrm{P}\gamma^2 - 2\gamma\mathrm{P}\gamma d = d\mathrm{P}\gamma^2.$$

Faisons entrer en considération les tenseurs.

La formule (1) représente alors la détermination d'un système de segments au moyen de deux segments.

On a

$$\mathrm{P}\gamma^2 = \mathrm{P}d^2 + 2\,\mathrm{P}dd' + \mathrm{P}d'^2 = 2\,\mathrm{P}dd'.$$

D'où le théorème :

Le volume du tétraèdre déterminé par les deux segments par lesquels on peut représenter un système de segments est indépendant du choix du couple de segments.

Soient d, d' et d_1, d'_1 deux couples de segments équivalents

$$d + d' = d_1 + d'_1.$$

Si trois des droites appartiennent à un complexe γ, c'est-à-dire si l'on a

$$\mathrm{P}\gamma d = 0, \qquad \mathrm{P}\gamma d' = 0, \qquad \mathrm{P}\gamma d_1 = 0,$$

la quatrième droite en fera également partie. Or on peut trouver trois complexes linéairement indépendants ayant en commun trois droites. La quatrième droite appartiendra aussi à ces complexes et par suite à la série réglée qu'ils ont en commun.

Foyer et plan focal. — Cherchons le lieu des droites d appartenant à un complexe γ et passant par un point μ.

Une droite passant par μ est de la forme

$$d = \mathrm{L}\mu\varpi,$$

ϖ représentant un plan quelconque.

On doit avoir

$$\mathrm{P}\gamma d = 0,$$

$$\mathrm{P}\gamma d = \mathrm{P}.\gamma\mathrm{L}\mu\varpi = \mathrm{P}.\gamma(\mu\varpi - \mathrm{P}\mu\varpi) = \mathrm{P}.\gamma\mu\varpi = {}^{\mathrm{P}}(\mathrm{L}\gamma\mu.\varpi).$$

On a donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{L}\gamma\mu.\varpi) = 0,$$

formule qui exprime que le plan ϖ contient le vecteur $\mathrm{L}\gamma\mu$, et par suite que la droite d, qui est perpendiculaire au plan ϖ, est également perpendiculaire à ce vecteur, c'est-à-dire a pour lieu le plan passant par μ et perpendiculaire à la direction de $\mathrm{L}\gamma\mu$.

Ce dernier plan s'appelle le *plan focal* du point μ.

Cherchons de même le lieu des droites d appartenant à un plan ϖ et au complexe γ.

Toute droite située dans le plan ϖ est de la forme

$$d = \mathrm{L}\varpi p,$$

p étant un plan quelconque. On doit avoir

$$\mathrm{P}.\gamma \mathrm{L}\varpi p = 0,$$

ou

$$\mathrm{P}.\gamma\,(\varpi p - \mathrm{G}\varpi p) = \mathrm{P}.\gamma\varpi p = \mathrm{P}.\mathrm{L}\gamma\varpi.p = 0.$$

La dernière formule exprime que le plan p, et par suite la droite d, passe par le point $\mathrm{L}\gamma\varpi$. Ce point est appelé le *foyer* du plan ϖ.

Le moyen le plus naturel de déterminer le lieu des droites d'un complexe passant par un point donné ou situées dans un plan donné consiste dans la décomposition déjà mentionnée du complexe suivant le point ou le plan.

On a par exemple dans le cas du plan

$$\gamma = -\varpi^2\gamma = -\varpi\mathrm{L}\varpi\gamma - \varpi\mathrm{P}\varpi\gamma$$

ou

$$\gamma = f + d_0, \tag{2}$$

où f et d_0 représentent des droites (conjuguées évidemment) dont l'une, f, est perpendiculaire à ϖ et passe par le point $\mathrm{L}\varpi\gamma$, et dont l'autre, d_0, est située dans le plan ϖ.

Les droites d du complexe appartenant au plan ϖ sont déterminées par l'équation

$$\mathrm{P}(f + d_0)d = 0$$

ou

$$\mathrm{P}fd = 0,$$

formule qui exprime que la droite d du plan ϖ rencontre la droite f, c'est-à-dire passe par le point $\mathrm{L}\varpi\gamma$.

La droite d_0 est le lieu des points du plan ϖ dont les plans focaux passent par la droite f, c'est-à-dire sont perpendiculaires à ce plan ϖ.

Cette droite d_0, étant l'intersection du plan ϖ et du plan $\mathrm{P}\varpi\gamma$, qui est parallèle à l'axe de γ, est parallèle à la projection de cet axe sur ϖ.

La droite d_0 est appelée la *caractéristique* du plan ϖ, en considération de ce qu'elle est en effet la caractéristique de ce plan dans le déplacement infinitésimal représenté par le complexe γ.

Il est facile de constater que les projections sur un plan ϖ de deux droites conjuguées se coupent en un point de la caractéristique de ce plan.

Soient, en effet, d et d' deux droites conjuguées, telles que l'on ait

$$\gamma = d + d'.$$

Les plans projetant d et d' sur ϖ sont respectivement

$$P\varpi d, \qquad P\varpi d'.$$

D'autre part, f étant perpendiculaire à ϖ, on a

$$P\varpi f = 0$$

et, par suite,

$$P\varpi d + P\varpi d' = P\varpi\gamma = P\varpi(f + d_0) = P\varpi d_0,$$

formule qui montre que les trois plans $P\varpi d$, $P\varpi d'$ et $P\varpi d_0$, perpendiculaires à ϖ, passent par la même ligne droite et, par suite, que les projections de d et d' se coupent sur d_0.

Les droites f et d_0 constituent un couple de droites conjuguées rectangulaires entre elles.

Droites rectangulaires avec leurs conjuguées. — Cherchons le lieu des droites présentant cette propriété d'être rectangulaires avec leurs conjuguées.

Soient d une de ces droites et d' sa conjuguée.

On doit avoir

$$G\,dd' = 0.$$

L'équation du lieu est donc

$$G.d(d\mathrm{P}\gamma^2 - 2\gamma\,\mathrm{P}\gamma d) = 0,$$

ou

$$d^2\mathrm{P}\gamma^2 - 2\mathrm{G}d\gamma\mathrm{P}\gamma d = 0, \tag{3}$$

équation d'un complexe du second degré.

Cherchons le lieu des droites appartenant à ce complexe et passant par un point μ.

Décomposons le complexe γ suivant le point μ :

$$\begin{aligned}\gamma = \mu^2\gamma &= \mu\mathrm{P}\mu\gamma + \mu\mathrm{L}\mu\gamma \\ &= \mu\mathrm{P}\mu\gamma + \mathrm{L}\gamma\mu,\end{aligned}$$

où $\mu\mathrm{P}\mu\gamma$ représente une droite passant par le point μ et $\mathrm{L}\gamma\mu$ un vecteur. Nous poserons

$$\mathrm{L}\gamma\mu = \omega d_1, \qquad \mu\mathrm{P}\mu\gamma = d_2,$$

d_1 et d_2 représentant des droites passant par le point μ.

Nous aurons donc

$$\gamma = d_2 + \omega d_1.$$

Pour une droite d passant par le point μ, on a

$$\mathrm{P}\gamma d = \mathrm{G}d_1 d, \qquad \mathrm{G}\gamma d = \mathrm{G}d_2 d,$$

de sorte que l'équation (3) devient, pour les droites d passant par le point μ,

$$d^2\mathrm{G}d_1 d_2 - \mathrm{G}d_1 d\,\mathrm{G}d_2 d = 0, \tag{4}$$

équation d'un cône du second degré qui a parmi ses génératrices les

droites d_1 et d_2 et dont les sections cycliques sont perpendiculaires à ces droites, car les génératrices communes au cône (4) et au cône des droites isotropes

$$d^2 = 0$$

sont situées dans les plans

$$\mathrm{G}d_1 d = 0, \qquad \mathrm{G}d_2 d = 0,$$

contenant les droites d respectivement perpendiculaires à d_1 et à d_2.

Sur chacune des génératrices du cône (4) il existe un point m dont le plan focal est perpendiculaire à cette génératrice. Cherchons le lieu de ces points.

Le plan focal de tout point m étant perpendiculaire au vecteur

$$\mathrm{L}\gamma m,$$

on doit avoir

$$\mathrm{L}\gamma m = x\mathrm{L}\mu m,$$

formule qui exprime que le vecteur $\mathrm{L}\gamma m$ a la même direction que le vecteur $\mathrm{L}\mu m$ déterminé par les deux points μ et m, en désignant par x une quantité numérique.

L'équation du lieu du point m sera donc

$$\mathrm{L}d_2 m + \omega d_1 \mathrm{T}m = x\mathrm{L}\mu m, \tag{5}$$

équation vectorielle linéaire homogène en m qui déterminera une position de m pour chaque valeur de la variable x.

Mais, puisque nous connaissons une surface lieu des points m, il suffit d'en déterminer une autre.

Effectuons sur les deux membres de l'équation (5) l'opération

$$\mathrm{P}.d_2.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{P}.\omega d_2 d_1 \mathrm{T} m &= x\mathbf{P}.d_2 \mathrm{L}\mu m \\ &= x\mathbf{P}.d_2\mu m \\ &= x\mathbf{P}.\mathrm{P}d_2\mu.m \\ &= -x\mathbf{P}mp_2 \end{aligned}$$

en posant

$$\mathrm{P}d_2\mu = p_2.$$

En effectuant de même l'opération

$$\mathbf{P}.d_1$$

et posant

$$\mathrm{P}d_1\mu = p_1,$$

on obtient

$$\mathbf{P}.d_1 \mathrm{L}d_2 m + d_1^2 \mathrm{T}m = -x\mathbf{P}mp_1.$$

Enfin, en éliminant x entre les deux équations ainsi obtenues, on a l'équation du lieu

$$\mathbf{P}.m[p_1 \mathbf{P}.\omega d_2 d_1 \mathrm{T}m - p_2(\mathbf{P}.d_1 \mathrm{L}d_2 m + d_1^2 \mathrm{T}m)] = 0$$

ou

$$\mathbf{P}.m[p_1 \mathrm{G}d_1 d_2 \mathrm{T}m + p_2(\mathbf{P}.\mu d_1 d_2 m - d_1^2 \mathrm{T}m)] = 0, \tag{6}$$

équation du second degré homogène en m qui représente une surface du second degré.

Nous verrons au Chapitre suivant les moyens de déterminer les éléments d'une surface du second degré représentée par une telle équation.

Mais la forme de l'équation (6) met directement en évidence les génératrices rectilignes de la surface. Elles sont déterminées par les équations

$$\mathbf{P}mp_1 = x\mathbf{P}mp_2, \qquad x\mathrm{G}d_1 d_2 \mathrm{T}m = -\mathbf{P}.\mathrm{P}\mu d_1 d_2.m + d_1^2 \mathrm{T}m$$

et

$$\mathrm{G}d_1d_2\mathrm{T}m = x\mathrm{P}mp_2, \qquad x\mathrm{P}mp_1 = -\mathrm{P}.\mathrm{P}\mu d_1d_2.m + d_1^2\mathrm{T}m,$$

où x et y sont des quantités numériques variables.

On reconnaît un paraboloïde hyperbolique ayant pour plans directeurs les plans p_2 et $\mathrm{P}\mu d_1d_2$; ce dernier est le plan déterminé par les droites concourantes d_1 et d_2.

Parmi les génératrices de l'un des systèmes se trouve l'intersection des plans p_1 et p_2, c'est-à-dire la perpendiculaire menée par le point μ au plan $\mathrm{P}\mu d_1d_2$.

Cherchons maintenant le lieu des droites d appartenant au complexe (3) et situées dans un plan ϖ.

Décomposons le complexe suivant le plan ϖ,

$$\gamma = -\varpi^2\gamma = -\varpi\mathrm{T}\varpi\gamma - \varpi\mathrm{P}\varpi\gamma = f + d_0.$$

Pour toute droite d située dans le plan ϖ, on a

$$\mathrm{P}dd_0 = 0, \qquad \mathrm{G}df = 0,$$

et, par suite,

$$\mathrm{P}d\gamma = \mathrm{P}df, \qquad \mathrm{G}d\gamma = \mathrm{G}dd_0.$$

On a, d'ailleurs,

$$\mathrm{P}\gamma^2 = 2\mathrm{P}fd_0.$$

L'équation (3) devient donc pour les droites du plan ϖ

$$d^2\mathrm{P}fd_0 - \mathrm{G}dd_0\mathrm{P}df = 0, \tag{7}$$

équation tangentielle d'une conique.

Cette conique est évidemment une parabole ayant pour foyer le pied de la droite f et pour tangente au sommet la droite d_0. Car, d'une part,

l'équation (7) est satisfaite par

$$d = d_0,$$

et, d'autre part, les droites isotropes

$$d^2 = 0,$$

qui satisfont à l'équation (7), sont déterminées par les équations

$$\mathrm{G}\, d d_0 = 0, \qquad \mathrm{P}\, df = 0,$$

c'est-à-dire sont perpendiculaires à d_0 ou rencontrent la droite f.

Cherchons encore un lieu de droites appartenant au complexe quadratique (3).

Pour cela considérons en chaque point μ d'une droite donnée δ la droite d qui a pour direction $\mathrm{L}\gamma\mu$, c'est-à-dire qui est perpendiculaire au plan focal de μ.

La série réglée décrite par la droite d, lorsque le point μ se déplace sur la droite δ, est représentée par des équations très simples.

Décomposons le complexe γ suivant la droite δ, c'est-à-dire posons

$$\gamma = \dot{\delta} + \delta',$$

en prenant pour $\dot{\delta}$ un tenseur convenable et en désignant par δ' la droite conjuguée de $\dot{\delta}$ par rapport au complexe.

Les équations de la série réglée décrite par d sont les suivantes :

$$(8) \qquad \mathrm{P}\, \dot{\delta} d = 0, \qquad \mathrm{G}\, \dot{\delta}' d = 0, \qquad \mathrm{P}\,.\,\mathrm{L}\dot{\delta}\dot{\delta}'.d = 0.$$

La première exprime que la droite d rencontre δ, la seconde qu'elle est rectangulaire avec δ'; la troisième se vérifie de la manière suivante, qui servirait également à établir les deux premières, si elles n'étaient pas évidentes.

On a, en désignant par ϖ le plan déterminé par la droite δ' et le point μ situé sur la droite δ,

$$d = \varpi \mathrm{L} \varpi \delta,$$

d'où

$$\mathrm{P}(\mathrm{L}\delta\delta'.d) = \mathrm{P}(\mathrm{L}\delta\delta'.\varpi \mathrm{L}\varpi\delta) = \mathrm{P}(\mathrm{L}\delta\delta'.\varpi^2\delta) - \mathrm{P}(\mathrm{L}\delta\delta'.\varpi \mathrm{P}\varpi\delta).$$

Les deux termes de cette expression sont nuls; le premier s'écrit en effet

$$\mathrm{P}(\mathrm{L}\delta'\delta.\delta) = \mathrm{P}.\delta'\delta^2 = 0,$$

et le second

$$\mathrm{P}(\delta\delta'\varpi \mathrm{P}\varpi\delta) = \mathrm{P}(\delta \mathrm{P}\delta'\varpi \mathrm{P}\varpi\delta) = \mathrm{P}[\delta \mathrm{L}(\mathrm{P}\delta'\varpi \mathrm{P}\varpi\delta)] = 0,$$

car l'expression

$$\mathrm{L}(\mathrm{P}\delta'\varpi \mathrm{P}\varpi\delta)$$

représente une droite du plan $\mathrm{P}\varpi\delta$ et, par suite, rencontre δ.

Les équations (8) expriment que la droite d appartient aux trois complexes linéaires

$$\delta, \quad \omega\delta' \quad \text{et} \quad \mathrm{L}\delta\delta'.$$

La droite d, qui reste parallèle à un même plan, décrit un paraboloïde hyperbolique.

Lorsque les droites δ et δ' sont rectangulaires, c'est-à-dire lorsque la droite δ appartient au complexe quadratique (3), l'expression $\mathrm{L}\delta\delta'$ représente la perpendiculaire commune à δ et δ' et, par suite, la droite d engendre le plan mené par δ perpendiculairement à δ'.

Les normales le long de δ à la surface réglée (8) forment également une série réglée qui a pour équation

$$\mathrm{P}\delta d = 0, \qquad \mathrm{G}\delta d = 0, \qquad \mathrm{P}\delta' d = 0.$$

— — —

CHAPITRE IV.

SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

Nouvelles notations. — Comme dernier exemple de l'emploi du calcul des triquaternions comme analyse géométrique, nous l'appliquerons à la démonstration des propriétés fondamentales des quadriques.

Il est nécessaire, auparavant, de compléter le calcul au moyen de nouvelles notations, ainsi que d'exposer les premiers éléments d'une théorie en triquaternions des transformations projectives.

Le calcul des triquaternions présente la grave lacune de ne pas fournir le moyen de représenter (sans l'aide d'un système de référence) certaines propriétés projectives simples.

C'est ainsi que nous n'avons pas d'expression représentant la droite joignant deux points donnés ou le plan passant par une droite et un point donnés.

Il est pourtant remarquable qu'en prenant pour élément le plan, nous obtenons immédiatement la représentation des produits extérieurs de Grassmann, savoir : de la droite commune à deux plans p et p', par $\mathrm{L}pp'$; du point commun aux plans p, p', p'', par $\mathrm{L}.pp'p''$; du volume du tétraèdre formé par les plans p, p', p'', p''', par $\frac{1}{6}\,\mathrm{P}.pp'p''p'''$.

Il ne semble pas que le calcul des triquaternions permette de résoudre d'une manière satisfaisante la difficulté qui se présente pour exprimer les propriétés analogues relativement au point.

Nous nous contenterons donc d'introduire une notation qui présentera au moins l'avantage de simplifier l'écriture.

Nous représenterons par $\mathrm{V}.m, m'$ la droite joignant les points m et m' et par $\mathrm{S}.c, m$, le plan focal du point m par rapport au complexe c. Ou mieux, si l'on pose

$$m = \mu x_0 + \omega\rho, \qquad m' = \mu x'_0 + \omega\rho', \qquad c = \alpha + \omega\beta,$$

nous définirons les fonctions V et S par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathrm{V}.m,m' = x_0\rho' - x'_0\rho + \omega \mathrm{L}\rho\rho', \\ \mathrm{S}.c,m = \mu(x_0\beta + \mathrm{G}\alpha\rho) + \omega \mathrm{G}\beta\rho. \end{cases}$$

On a en particulier, en appliquant les fonctions V et S à des vecteurs $\omega\rho$ et $\omega\rho'$,

$$\mathrm{V}.\omega\rho,\omega\rho' = \omega \mathrm{L}\rho\rho',$$
$$\mathrm{S}.\omega\rho,\omega\rho' = \omega \mathrm{G}\rho\rho'.$$

On voit que les fonctions S et V nous permettront d'exprimer les propriétés des vecteurs comme dans le calcul des triquaternions, tandis que nous ne le pouvions pas au moyen des fonctions G, L et P, le produit de deux vecteurs étant nul.

Nous pourrons soumettre les fonctions S et V au calcul triquaternionien moyennant l'établissement préliminaire de propriétés fondées sur les formules de définition (1).

Nous citerons les formules suivantes, que l'on vérifiera facilement :

$$\mathrm{S}.c,m = \mathrm{S}.m,c, \qquad \mathrm{V}.m,m' = -\mathrm{V}.m',m.$$

$$\mathrm{G}.c\mathrm{S}.c,m = 0, \qquad \mathrm{L}.c\mathrm{S}.c,m = \tfrac{1}{2}\mathrm{P}c^2.m, \qquad \mathrm{P}.c\mathrm{S}.c,m = \mathrm{S}.c,\mathrm{L}cm,$$
$$\mathrm{G}.\mathrm{S}.c,m.m = 0, \qquad \mathrm{L}.\mathrm{S}.c,m.m = \mathrm{V}.m,\mathrm{L}cm, \qquad \mathrm{P}.\mathrm{S}.c,m.m = 0,$$
$$\mathrm{G}.m\mathrm{V}.m,m' = 0, \qquad \mathrm{L}.m\mathrm{V}.m,m' = 0, \qquad \mathrm{P}.m\mathrm{V}.m,m' = -\mathrm{S}.m,\mathrm{L}mm'.$$

L'équation en p

$$\mathrm{L}.cp = m$$

est résolue par la formule

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{P}c^2.p = \mathrm{S}.c,m.$$

Nous poserons enfin, pour simplifier l'écriture,

$$\mathrm{S}.m,m',m'' = \mathrm{S}.(\mathrm{V}.m,m'),m'' = \mathrm{S}.m(\mathrm{V}.m'm'').$$

En somme, les fonctions S et V, moyennant l'établissement préliminaire de quelques formules, peuvent être introduites dans le calcul comme les fonctions G, L, P elles-mêmes et comblent ainsi en partie la lacune indiquée.

Pour combler une autre lacune, nous allons exposer un moyen d'appliquer le calcul des triquaternions à la Géométrie plane.

On peut également établir un calcul complexe s'appliquant à la géométrie rectiligne de la manière suivante :

Soit une droite i de tenseur égal à l'unité.

Représentons chaque point de cette droite par le plan mené par ce point perpendiculairement à la droite, c'est-à-dire par une expression de la forme

$$\mu i + \omega x,$$

x étant l'abscisse de ce point par rapport à un point μ pris pour origine.

Adjoignant à ces quantités celles que l'on obtient au moyen des unités 1 et ωi, on obtient des quantités de la forme

$$r = w + \mu i + \omega x + \omega i y = \mathrm{G}r + \mathrm{P}r + \mathrm{L}r,$$

qui constituent un système numérique complexe.

L'expression

$$\mathrm{L}r = \omega i y$$

ne dépend que d'une seule quantité numérique. Il sera souvent avantageux de poser

$$\mathrm{L}r = iy \qquad \text{ou} \qquad \omega \mathrm{L}r = \mathrm{L}r.$$

Ce système numérique complexe pourra être utile notamment dans la détermination de l'intersection d'une droite donnée avec une surface donnée.

Nous avons vu qu'un complexe de l'espace peut être décomposé suivant un plan en deux droites dont l'une est située dans le plan et l'autre perpendiculaire à ce plan.

Comme nous pouvons représenter les points d'un plan par les droites menées par ces points perpendiculairement au plan, on voit que l'ensemble des complexes de l'espace suffit à représenter les points et les droites du plan.

Adjoignant à ces quantités les quantités complexes obtenues au moyen des deux unités 1 et ω, on obtient précisément un biquaternion

$$r = w + c + \omega w_1,$$

de sorte que la Géométrie plane possède un calcul numérique complexe comme la Géométrie dans l'espace.

Prenons une origine située dans le plan et trois axes de coordonnées rectangulaires, dont deux soient situés dans le plan et le troisième lui soit perpendiculaire. Nous écrirons r sous la forme

$$r = w + ix + jy + kz + \omega(ix_1 + jy_1 + kz_1) + \omega w_1.$$

Nous décomposerons ce biquaternion en quatre parties :

La partie numérique, Gr ou w;

Le terme en ω, Pr ou ωw_1 ;

La partie du complexe Lr ou c, représentant une droite perpendiculaire au plan, que nous désignerons par Mr,

$$\mathrm{M}r = kz + \omega(ix_1 + jy_1);$$

Enfin la partie du complexe c représentant une droite du plan, que nous désignerons par Dr,

$$\mathrm{D}r = ix + jy + \omega kz_1.$$

Les règles de ce calcul planaire sont représentées par les formules suivantes, dans lesquelles d, d' représentent des droites du plan, et n, n' des

droites perpendiculaires au plan, c'est-à-dire des points du plan,

$$(2)\quad \begin{cases} \mathrm{G}nn' = \mathrm{G}n'n, & \mathrm{M}nn' = -\mathrm{M}n'n, & \mathrm{D}nn' = 0, & \mathrm{P}nn' = 0, \\ \mathrm{G}nd = 0, & \mathrm{M}nd = 0, & \mathrm{D}nd = -\mathrm{D}dn, & \mathrm{P}nd = \mathrm{P}dn, \\ \mathrm{G}dd' = \mathrm{G}d'd, & \mathrm{M}dd' = -\mathrm{M}d'd, & \mathrm{D}dd' = 0, & \mathrm{P}dd' = 0. \end{cases}$$

Il est à remarquer que ce calcul comprend celui des équipollences.

Il a, relativement à la Géométrie plane, les mêmes propriétés que le calcul des triquaternions relativement à la Géométrie dans l'espace, la fonction M jouant le rôle de la fonction L et la fonction D celui de la fonction P.

Les deux calculs présentent aussi les mêmes lacunes.

Une propriété remarquable de ces deux calculs consiste dans la facilité de passer, lorsque c'est nécessaire, du calcul des triquaternions à celui des biquaternions relatif à un plan donné.

On peut toujours, par exemple, trouver l'équation biquaternionienne de la section plane d'une surface représentée par une équation en triquaternions. On en a rencontré des exemples dans la recherche de certains lieux géométriques. Le procédé est général.

Il n'est pas moins simple d'obtenir l'équation biquaternionienne de la projection sur un plan donné d'une courbe représentée par deux équations en triquaternions.

Le passage de la Géométrie dans l'espace à la Géométrie plane est basé sur les formules

$$n = \varpi m \qquad \text{ou} \qquad m = -\varpi n,$$

où m représente un point du plan ϖ et n la perpendiculaire à ce plan, et, par suite, le point lui-même dans le système de calcul relatif au plan.

Pour trouver l'équation de la projection sur un plan ϖ de la courbe d'intersection des deux surfaces

$$\mathrm{F}(m) = 0, \qquad \mathrm{F}'(m) = 0,$$

on pose

$$m = -\varpi n + \omega\varpi x,$$

x étant une quantité numérique et $\omega\varpi x$ représentant le vecteur déterminé par le point m et sa projection $-\varpi n$ sur le plan ϖ.

On aura l'équation cherchée en n en éliminant x entre les deux équations

$$F(-\varpi n + \omega\varpi x) = 0, \qquad F'(-\varpi n + \omega\varpi x) = 0.$$

Transformations projectives. — Pour aborder la théorie des surfaces du second degré, il est nécessaire d'établir quelques notions et quelques formules dues à l'application du calcul complexe aux transformations projectives de l'espace.

C'est là l'objet de ce paragraphe. Du reste, ces propriétés présentent un intérêt propre.

Une transformation projective de l'espace peut se présenter sous trois formes :

Une transformation linéaire homogène

$$m' = \varphi(m),$$

où m et m' sont des points, représente une transformation homographique.

Une transformation linéaire homogène

$$p' = \varphi_1(m),$$

où m est un point et p' un plan, représente une transformation projective dualistique.

Enfin, une transformation linéaire homogène,

$$c' = \Phi(c),$$

où c et c' sont des complexes, représente une transformation projective de l'une ou l'autre espèce, à la condition de laisser invariante l'équation

quadratique

$$\mathrm{P}c^2 = 0$$

de la variété formée par les droites dans la variété des complexes.

Nous dirons quelques mots de chacune des fonctions linéaires homogènes φ, φ_1, Φ, notamment de la manière dont on peut réaliser leur inversion, c'est-à-dire résoudre les équations ci-dessus en m et c, sans faire appel aux systèmes d'équations ordinaires qu'elles représentent.

L'inversion d'une fonction du premier type se traite par une méthode calquée sur celle qui a été exposée par Hamilton pour l'inversion des fonctions linéaires homogènes vectorielles et qui est basée sur l'existence d'une relation identique à laquelle satisfont ces fonctions.

Dans le cas des fonctions ponctuelles, la relation est du quatrième degré, c'est-à-dire que l'on aura identiquement

$$\varphi^4(m) + \mathrm{A}\varphi^3(m) + \mathrm{B}\varphi^2(m) + \mathrm{C}\varphi(m) + \mathrm{D}m = 0,$$

où A, B, C, D sont des coefficients numériques qu'on détermine en calculant φ^2, φ^3, φ^4.

En remplaçant, dans la relation identique, $\varphi(m)$ par m', elle devient

$$\varphi^3(m') + \mathrm{A}\varphi^2(m') + \mathrm{B}\varphi(m') + \mathrm{C}m' + \mathrm{D}m = 0,$$

formule qui donne l'expression de m en fonction de m', c'est-à-dire qui résout l'inversion de la fonction φ.

Du reste, la théorie des systèmes d'équations linéaires homogènes ou matrices a été développée à ce point de vue, notamment par Sylvester (1).

Nous la compléterons par l'établissement d'une notion qui nous sera utile, celle de transformations conjuguées.

Hamilton appelle *fonction conjuguée* d'une fonction linéaire homogène vectorielle φ une autre fonction φ' de même espèce telle que, ρ et ρ_1 étant

(1) SYLVESTER, *Comptes rendus*, 1884.

deux vecteurs quelconques, on ait toujours la relation

$$S\rho\varphi(\rho_1) = S\rho_1\varphi'(\rho).$$

La définition est réciproque.

On peut observer que cette propriété est métrique.

La propriété par laquelle nous allons définir la transformation conjuguée d'une transformation homographique est au contraire projective.

Soit le système d'équations

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + cz + dt, \\ y' &= a'x + b'y + c'z + d't, \\ z' &= a''x + b''y + c''z + d''t, \\ t' &= a'''x + b'''y + c'''z + d'''t, \end{aligned}$$

où les variables sont des coordonnées de points et que nous représenterons par

$$m' = \varphi(m).$$

Soit p un plan quelconque de coordonnées u, v, w, n. On peut écrire

$$\begin{aligned} &ux' + vy' + wz' + nt' \\ &\quad = (au + a'v + a''w + a'''n)x + (bu + b'v + \ldots)y + \ldots, \end{aligned}$$

relation que l'on peut écrire en triquaternions

$$\mathbf{P}.p\varphi(m) = \mathbf{P}.\varphi'(p)\,m,$$

en désignant par φ' la fonction linéaire homogène planaire

$$\begin{aligned} u' &= au + a'v + a''w + a'''n, \\ v' &= bu + b'v + b''w + b'''n, \\ w' &= cu + c'v + c''w + b'''n, \\ n' &= du + d'v + d''w + a'''n. \end{aligned}$$

Nous appellerons φ' la fonction conjuguée de φ.

La définition est d'ailleurs réciproque.

Considérons trois points m_1, m_2, m_3 et le plan passant par ces trois points

$$p = \mathrm{S}.m_1, m_2, m_3.$$

Les trois points

$$m'_1 = \varphi(m_1), \qquad m'_2 = \varphi(m_2), \qquad m'_3 = \varphi(m_3)$$

déterminent également un plan

$$p' = \mathrm{S}.m'_1, m'_2, m'_3,$$

qui est fonction linéaire homogène du plan p

$$p' = \psi(p).$$

On a évidemment

$$\mathrm{P}m'p' = \lambda \mathrm{P}mp,$$

λ étant une quantité numérique, ou

$$\mathrm{P}.m'\psi(p) = \mathrm{P}.p\psi'(m') = \mathrm{P}.p\psi'[\varphi(m)] = \lambda \mathrm{P}mp$$

et, par suite,

$$\psi'\varphi = \lambda \qquad \text{et} \qquad \lambda\varphi^{-1} = \psi'.$$

On a là une expression de la fonction inverse de φ.

C'est tout ce que nous dirons des transformations homographiques.

Soit une transformation dualistique

$$p' = \varphi_1(m). \tag{3}$$

Nous appellerons *conjuguée* de la fonction φ_1 la fonction de même espèce $\varphi'_1(m)$ caractérisée par la relation identique

$$\mathrm{P}.m_1\varphi_1(m) = \mathrm{P}.m\varphi'_1(m_1).$$

Si φ_1 est exprimée sous la forme suivante, qui est évidemment générale,

$$\varphi_1(m) = p'_1 \mathbf{P} p_1 m + p'_2 \mathbf{P} p_2 m + p'_3 \mathbf{P} p_3 m + p'_4 \mathbf{P} p_4 m,$$

on aura

$$\varphi'_1(m) = p_1 \mathbf{P} p'_1 m + p_2 \mathbf{P} p'_2 m + p_3 \mathbf{P} p'_3 m + p_4 \mathbf{P} p'_4 m$$

en vertu de l'identité

$$\begin{aligned}\mathbf{P} . m_1 \varphi_1(m) &= \mathbf{P} m_1 p'_1 \mathbf{P} p_1 m + \mathbf{P} m_1 p'_2 \mathbf{P} p_2 m + \mathbf{P} m_1 p'_3 \mathbf{P} p_3 m + \mathbf{P} m_1 p'_4 \mathbf{P} p_4 m \\ &= \mathbf{P} m p_1 \mathbf{P} p'_1 m_1 + \mathbf{P} m p_2 \mathbf{P} p'_2 m_1 + \mathbf{P} m p_3 \mathbf{P} p'_3 m_1 + \mathbf{P} m p_4 \mathbf{P} p'_4 m_1 \\ &= \mathbf{P} m \varphi'_1(m_1).\end{aligned}$$

Les fonctions φ_1 et φ'_1 étant de même espèce peuvent être identiques entre elles, et dans ce cas, nous dirons que la fonction φ_1 est *autoconjuguée*.

On définirait d'une manière analogue la transformation conjuguée d'une transformation dualistique transformant un plan en un point.

La conjuguée d'une somme de deux fonctions est la somme de leurs conjuguées.

Il en résulte que $\varphi_1 + \varphi'_1$ est autoconjuguée.

On a identiquement

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi'_1}{2}.$$

On décompose ainsi une fonction φ_1 en une fonction autoconjuguée $\frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}$ et une autre fonction $\frac{\varphi_1 - \varphi'_1}{2}$ qui présente un caractère particulier.

En effet $\varphi_1 - \varphi'_1$ se compose de couples de termes de la forme

$$p'_1 \mathbf{P} p_1 m - p_1 \mathbf{P} p'_1 m,$$

expression qui représente le plan passant par l'intersection des plans p_1 et p'_1 et par le point m. En fait, on a la formule

$$p'_1 \mathrm{P} p_1 m - p_1 \mathrm{P} p'_1 m = \mathrm{S}.\mathrm{L} p_1 p'_1, m.$$

Chaque couple de termes de cette sorte donnera pareille réduction et l'on aura finalement

$$\varphi_1(m) - \varphi'_1(m) = \mathrm{S}.c, m,$$

où c est le complexe somme de toutes les droites $\mathrm{L} p_1 p'_1$.

L'équation

$$p' = \mathrm{S}.cm$$

est la forme générale des transformations dualistiques faisant correspondre à tout point un plan qui le contienne.

La décomposition que nous venons de réaliser est celle de Clebsch (1),

$$\begin{aligned}
u &= ax + by + cz + dt \\
&= ax + \frac{b+a'}{2}y + \frac{c+a''}{2}z + \frac{d+a'''}{2}t + \frac{b-a'}{2}y + \frac{c-a''}{2}z + \frac{d-a'''}{2}t, \\
v &= a'x + b'y + c'z + d't \\
&= \frac{b+a'}{2}x + b'y + \frac{c'+b''}{2}z + \frac{d'+b'''}{2}t + \frac{a'-b}{2}x + \frac{c-b''}{2}z + \frac{d'-b'''}{2}t, \\
w &= a''x + b''y + c''z + d''t \\
&= \frac{c+a''}{2}x + \frac{c'+b''}{2}z + c''z + \frac{d''+c'''}{2}t + \frac{a''-c}{2}x + \frac{b''-c'}{2}y + \frac{d''-c'''}{2}t, \\
n &= a'''x + b'''y + c'''z + d'''t \\
&= \frac{d+a'''}{2}x + \frac{d'+b'''}{2}y + \frac{d''+c'''}{2}z + d'''t + \frac{a'''-d}{2}x + \frac{b'''-d'}{2}y + \frac{c'''-d''}{2}z.
\end{aligned}$$

Au point de vue analytique, cette décomposition est l'analogue de la décomposition de Helmholtz pour les fonctions linéaires homogènes vecto-

(1) Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie*, II Band.

rielles. Mais, tandis que cette dernière décomposition est simplement métrique, c'est-à-dire invariante par rapport aux déplacements sans déformation de l'espace, la décomposition que nous venons d'exposer est projective.

On ne peut appliquer pour la résolution de l'équation (3) en m le procédé basé sur l'existence d'une relation identique, car l'itération d'une transformation dualistique n'a pas de signification.

Considérons trois points m_1, m_2, m_3 et le plan passant par ces trois points

$$p = \mathrm{S}\ m_1, m_2, m_3.$$

Aux trois points m_1, m_2, m_3 correspondent trois plans

$$p'_1 = \varphi_1(m_1), \qquad p'_2 = \varphi_1(m_2), \qquad p'_3 = \varphi_1(m_3).$$

Soit leur point commun

$$m' = \mathrm{L}.p'_1p'_2p'_3,$$

qui est évidemment une fonction linéaire homogène de p,

$$m' = \psi_1(p).$$

Si un point m est situé dans un plan p, le plan p' correspondant à m passera par le point m' correspondant à p, c'est-à-dire que l'on a identiquement

$$\mathrm{P}m'p' = \lambda \mathrm{P}mp,$$

λ étant une quantité numérique, ou

$$\mathrm{P}.\psi_1(p)\varphi_1(m) = \lambda \mathrm{P}mp$$

et, par suite,

$$\mathrm{P}.m\varphi'_1[\psi_1(p)] = \lambda \mathrm{P}mp$$

ou enfin, puisqu'il s'agit d'une relation identique,

$$\varphi'_1\psi_1 = \lambda,$$

c'est-à-dire qu'à un facteur numérique près, ψ_1 est l'inverse de φ'_1 et, par suite, la fonction ψ'_1 conjuguée de ψ_1 est l'inverse de φ_1.

Connaissant λ et ψ'_1, φ_1^{-1} sera donné par la formule

$$\lambda\varphi_1^{-1} = \psi'_1.$$

Pour obtenir ψ_1, il suffit d'effectuer la fonction φ_1 sur quatre points arbitrairement choisis, mais non coplanaires, m_1, m_2, m_3, m_4.

$$p'_1 = \varphi_1(m_1), \qquad p'_2 = \varphi_1(m_2), \qquad p'_3 = \varphi_1(m_3), \qquad p'_4 = \varphi_1(m_4).$$

On forme les quatre points

$$m'_1 = \mathrm{L}p'_2p'_3p'_4, \qquad m'_2 = \mathrm{L}p'_1p'_3p'_4, \qquad m'_3 = \mathrm{L}p'_4p'_1p'_2, \qquad m'_4 = \mathrm{L}p'_1p'_2p'_3.$$

On obtient l'expression de ψ_1 par la formule

$$\mathrm{P}.m_1\mathrm{S}.m_2, m_3, m_4.\psi_1(p) \equiv m'_1\mathrm{P}.m_1p + m'_2\mathrm{P}.m_2p + m'_3\mathrm{P}.m_3p + m'_4\mathrm{P}.m_4p.$$

On a enfin

$$\mathrm{P}.m_1\mathrm{S}.m_2, m_3, m_4.\psi'_1(p) \equiv m_1\mathrm{P}.p'_2p'_3p'_4p + m_2\mathrm{P}.p'_3p'_4p'_1p + m_3\mathrm{P}.p'_4p'_1p'_2p + m_4\mathrm{P}.p'_1p'_2p'_3p.$$

On choisira m_1, m_2, m_3, m_4 de manière à simplifier les calculs eu égard à la fonction donnée φ_1.

Quant à la valeur de λ, on voit, en remplaçant dans l'identité précédente p par $\varphi_1(m_1) = p'_1$, que l'on doit avoir

$$\mathrm{P}.m_1\mathrm{S}.m_2, m_3, m_4.\psi'_1\varphi_1(m_1) = m_1\mathrm{P}.p'_2p'_3p'_4p'_1.$$

D'où

$$\lambda = \frac{\mathrm{P}.p'_1p'_2p'_3p'_4}{\mathrm{P}.m_1\mathrm{S}.m_2, m_3, m_4}.$$

Le nombre λ est un invariant projectif de la transformation φ_1. C'est le déterminant des coefficients de cette transformation.

Appliquant le calcul indiqué à la forme générale de φ_1 donnée au commencement de ce paragraphe, on trouve

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{P}.p_1p_2p_3p_4\,\mathrm{P}p'_1p'_2p'_3p'_4\cdot\varphi_1^{-1}(p') \\ \quad = \mathrm{L}.p_2p_3p_4\,\mathrm{P}.p'p'_2p'_3p'_4 + \mathrm{L}.p_3p_4p_1\,\mathrm{P}.p'p'p'_4p'_1 \\ \qquad + \mathrm{L}.p_4p_1p_2\,\mathrm{P}.p'p'_4p'_1p'_2 + \mathrm{L}.p_1p_2p_3\,\mathrm{P}.p'p'_1p'_2p'_3. \end{array} \right.$$

Si λ est nul, la solution est illusoire.

Dans ce cas, $\varphi_1(m)$ satisfait à une relation linéaire homogène

$$\mathrm{P}.m'_0\varphi_1(m) \equiv 0.$$

D'où l'on déduit

$$\mathrm{P}.m\varphi'_1(m'_0) \equiv 0,$$

ou, comme m est quelconque,

$$\varphi'_1(m'_0) = 0.$$

La fonction φ'_1 a aussi son déterminant nul et il existe un point m_0 tel que l'on a

$$\varphi_1(m_0) = 0, \qquad \mathrm{P}.m_0\varphi'_1(m) = 0.$$

A tout point m de l'espace, φ_1 fait correspondre un plan p' passant par m'_0, et un même plan correspond à tous les points situés sur une même droite passant par m_0, comme le montre la formule

$$\varphi_1(m + xm_0) = \varphi_1(m) + x\varphi_1(m_0) = \varphi_1(m).$$

Pour que l'équation donnée (3) ait une solution, il faut que l'on ait

$$\mathrm{P}.m'_0p' = 0.$$

Cette condition une fois remplie, à p' correspondront tous les points d'une droite passant par m_0, de sorte qu'il suffira de considérer ce qui se passe dans un plan ϖ arbitrairement choisi, mais ne contenant ni m_0, ni m'_0. La fonction φ_1 fait correspondre à un point de ce plan une droite de ce plan, et l'on est ainsi ramené à l'étude d'une transformation dualistique dans le plan.

Pour cela il suffit de considérer, au lieu de $\varphi_1(m)$, la fonction

$$\mathrm{L}.\varpi\varphi_1(m),$$

en supposant que m appartienne au plan ϖ; et l'on aura à résoudre dans le plan ϖ l'équation

$$\mathrm{L}.\varpi\varphi_1(m) = \mathrm{L}.\varpi p',$$

que l'on mettra facilement sous la forme

$$\chi(n) = d'.$$

La résolution de cette équation de Géométrie plane s'opérera par un procédé calqué sur celui que nous venons d'exposer pour l'espace.

En appelant m_1 la solution ainsi obtenue, la solution générale de l'équation (3) s'écrira

$$m_1 + xm_0,$$

x étant une quantité numérique arbitraire.

Ainsi, dans ce cas, p' est à proprement parler fonction de la droite $\mathrm{V}.m_0, m$.

Effectivement, on peut s'écrire

$$\varphi_1(m) \equiv p'_1\mathrm{G}\delta_1\,\mathrm{V}.m_0, m + p'_2\mathrm{G}.\delta_2\,\mathrm{V}.m_0, m + p'_3\mathrm{G}.\delta_3\,\mathrm{V}.m_0, m,$$

où p'_1, p'_2, p'_3 sont trois plans passant par m'_0 et où $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sont des

droites passant par le point m_0 ; et, si l'on pose

$$\mathrm{V}.m_0, m = d \qquad \text{et} \qquad \varphi_1(m) = \theta(d),$$

l'équation

$$\theta(d) = p'$$

aura généralement une solution en d, si p' passe par m'_0.

Que l'on emploie le plan auxiliaire ou que l'on considère p' comme fonction de d, on est ramené aux fonctions linéaires ternaires, et l'on pourra opérer leur inversion par un procédé identique à celui que nous venons d'exposer pour les fonctions quaternaires.

La solution peut encore devenir illusoire, et il est clair que, dans ce cas, les plans p' passent par une même droite et peuvent être considérés comme fonctions de plans passant par une même droite, laquelle se confond avec la première, si la fonction φ_1 est autoconjuguée.

On pourra en somme, dans tous les cas, effectuer la résolution de l'équation (3) et en opérer la réduction à sa forme la plus simple.

Nous avons déterminé une fonction ψ_1 liée à la fonction φ_1 et transformant un plan en un point.

On peut de même déterminer la transformation qui, à une droite

$$d = \mathrm{V}.m_1, m_2$$

joignant deux points quelconques de l'espace, fait correspondre une autre droite

$$d = \mathrm{L}p'_1 p'_2$$

commune aux plans p'_1, p'_2,

$$p'_1 = \varphi_1(m_1), \qquad p'_2 = \varphi_1(m_2).$$

Nous sommes ainsi conduit à dire quelques mots des transformations du troisième type.

En formant $L.\varphi_1(m_1)\varphi_1(m_2)$, on obtiendra une fonction de $V.m_1, m_2$, et l'on aura ainsi une transformation faisant correspondre une droite à une autre ou même un complexe à un autre :

$$c' = \Phi(c). \tag{5}$$

On obtiendrait une fonction semblable en partant d'une transformation homographique.

La fonction Φ présente la propriété de conserver la variété quadratique formée par les droites, c'est-à-dire que l'on a la relation

$$\mathbf{P}c'^2 = \lambda \mathbf{P}c^2.$$

En introduisant, comme pour les autres fonctions déjà rencontrées, la notion de fonction conjuguée au moyen de la relation

$$\mathbf{P}.c\Phi(c_1) = \mathbf{P}.c_1\Phi'(c),$$

on voit que la condition précédente peut s'écrire

$$\mathbf{P}.c\left[\Phi'(c') - \lambda c\right] = 0$$

ou

$$\Phi'\Phi = \lambda.$$

La condition pour que la transformation Φ conserve la quadrique des droites, c'est-à-dire détermine une transformation projective, est donc que $\Phi'\Phi$ soit une quantité numérique.

Cette propriété nous permettra d'effectuer facilement l'inversion de la fonction Φ.

Nous pouvons donc admettre que nous savons effectuer en triquaternions l'inversion des fonctions linéaires homogènes de point, de plan et de droite donnant lieu à des transformations projectives.

Cette constatation était indispensable avant d'aborder la théorie des

surfaces du second degré, où nous utiliserons également la notion de fonction linéaire homogène conjuguée.

Surfaces du second degré. — Il pourrait subsister des doutes sur l'efficacité du calcul des triquaternions employé comme analyse géométrique, si nous ne montrions pas qu'il se prête très naturellement à l'établissement des propriétés élémentaires des quadriques.

La forme générale d'une équation homogène du second degré en m est évidemment

$$\mathbf{P}.m\varphi(m) = 0, \tag{6}$$

où $\varphi(m)$ représente un plan fonction linéaire homogène de m, fonction que l'on peut supposer autoconjuguée, en raison de l'identité

$$\mathbf{P}.m\mathrm{S}.c, m = 0.$$

Une quadrique est donc déterminée d'une manière univoque par une fonction φ linéaire homogène autoconjuguée.

Le plan $\varphi(m_0)$ est le plan polaire du point m_0 par rapport à la quadrique.

En effet, soit m un point de ce plan. Tout point de la droite joignant les points m et m_0 sera de la forme

$$m_0 + xm,$$

et les valeurs de x correspondant aux points d'intersection de cette droite avec la surface sont données par l'équation

$$\mathbf{P}.(m_0 + xm)\varphi(m_0 + xm) = 0,$$

ou

$$x^2\mathbf{P}.m\varphi(m) + 2x\mathbf{P}.m\varphi(m_0) + \mathbf{P}.m_0\varphi(m_0) = 0.$$

La condition pour que les points d'intersection forment avec m et m_0

une division harmonique est que les valeurs de x soient égales et de signes contraires, ce qui donne

$$\mathbf{P}.m\varphi(m_0) = 0,$$

qui exprime bien que le lieu du point m est le plan $\varphi(m_0)$.

Si le point m_0 est situé sur la surface, le plan $\varphi(m_0)$ est le plan tangent en ce point. On a en effet, en différentiant l'équation (6),

$$\mathbf{P}.m\varphi(dm) + \mathbf{P}.dm\varphi(m) = 0,$$

ou

$$2\,\mathbf{P}.dm\varphi(m) = 0,$$

formule qui exprime que le point ou le vecteur dm est bien situé dans le plan $\varphi(m)$, c'est-à-dire que $\varphi(m)$ est le plan tangent en m.

Posons

$$\varphi(m) = p, \qquad \text{ou} \qquad m = \varphi^{-1}(p).$$

En portant cette expression de m dans l'équation (6), on obtient l'équation tangentielle de la quadrique

$$\mathbf{P}.p\varphi^{-1}(p) = 0,$$

qui peut s'écrire, en introduisant la fonction $\psi(p)$ du paragraphe précédent,

$$\mathbf{P}.p\psi(p) = 0. \tag{7}$$

On peut aussi obtenir sous une forme analogue la condition pour qu'une droite soit tangente à la quadrique.

Cette condition s'écrira, en reprenant la fonction Φ du paragraphe précédent,

$$\mathbf{P}.c\Phi(c) = 0, \tag{8}$$

où l'on peut évidemment supposer Φ autoconjuguée, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$\Phi^2 = \lambda. \tag{9}$$

A l'équation (8) il faut joindre la condition

$$\mathbf{P}\, c^2 = 0.$$

Mais, sans adjonction de condition, l'équation (8) suffit à déterminer la quadrique tout comme l'équation (1) ou l'équation (7). Cette équation (8) définit alors l'ensemble des complexes autoconjugués par rapport à la quadrique.

Dans le cas où l'invariant projectif λ est nul, on a, suivant le paragraphe précédent, des identités de la forme

$$\mathbf{P}.m_0\varphi(m) = 0, \qquad \varphi(m_0) = 0,$$

m_0 étant un point déterminé de l'espace.

La surface est alors un cône, dont le point m_0 est le sommet.

La fonction inverse $\varphi^{-1}(p)$ n'a alors de sens que si le plan p passe par le point m_0, et, dans ce cas, elle a une infinité de déterminations de la forme $m + xm_0$.

Quant à la fonction

$$m' = \psi(p),$$

obtenue en prenant

$$p = \mathbf{S}.m_1, m_2, m_3, \qquad m' = \mathbf{L}.\varphi(m_1)\varphi(m_2)\varphi(m_3),$$

elle prend la forme

$$\psi(p) \equiv m_0\mathbf{P}.m_0 p,$$

où le tenseur de m_0 est supposé convenablement choisi.

L'équation tangentielle (7) se présente donc sous la forme d'un carré égalé à zéro :

$$(\mathbf{P}.m_0p)^2 = 0.$$

Les plans tangents au cône sont déterminés par deux équations, savoir l'équation tangentielle du point m_0,

$$\mathbf{P}.m_0p = 0,$$

et l'équation tangentielle d'une quadrique quelconque inscrite au cône. Cette dernière équation s'obtiendrait en partant d'une équation ponctuelle de la forme

$$\mathbf{P}.m\varphi(m) + [\mathbf{P}.mp_0]^2 = 0,$$

p_0 étant un plan quelconque ne passant pas par le point m_0.

Dans le cas qui nous occupe, la fonction Φ présente aussi des particularités. On peut la mettre sous la forme

$$\Phi(c) = A\delta_1\mathbf{P}.\delta_1c + B\delta_2\mathbf{P}.\delta_2c + C\delta_3\mathbf{P}.\delta_3c,$$

où δ_1, δ_2, δ_3 sont trois droites convenablement choisies passant par le point m_0, et A, B, C des coefficients numériques.

En réalité, $\Phi(c)$ ne dépend que du plan $\mathrm{S}.m_0, c$. Car l'on a

$$\mathrm{T}m_0.\mathbf{P}\delta_1c = \mathbf{P}.\omega\delta_1\mathrm{S}.m_0, c, \qquad \mathrm{T}m_0.\mathbf{P}\delta_2c = \mathbf{P}.\omega\delta_2\mathrm{S}.m_0, c,$$
$$\mathrm{T}m_0.\mathbf{P}\delta_3c = \mathbf{P}.\omega\delta_3\mathrm{S}.m_0, c,$$

et, par suite,

$$\mathrm{T}m_0.\Phi(c) = A\delta_1\mathbf{P}.\omega\delta_1\mathrm{S}.m_0, c + B\delta_2\mathbf{P}.\omega\delta_2\mathrm{S}.m_0, c + C\delta_3\mathbf{P}.\omega\delta_3\mathrm{S}.m_0, c.$$

Si l'on se borne à considérer les droites, on voit qu'à toute droite d de l'espace la fonction Φ fait correspondre une droite passant par m_0 et ne dépendant que du plan $\mathrm{S}.m_0, d$.

L'équation (8) devient

$$A[P.\delta_1 c]^2 + B[P.\delta_2 c]^2 + C[P.\delta_3 c]^2 = 0,$$

ou

$$A[P.\omega\delta_1 S.m_0, c]^2 + B[P.\omega\delta_2 S.m_0, c]^2 + C[P.\omega\delta_3 S.m_0, c]^2 = 0.$$

A ne considérer que les droites, cette équation représente bien l'ensemble des droites tangentes au cône, car elle exprime que les droites d et $\Phi(d)$ sont situées dans le même plan $S.m_0 d$.

En posant

$$S.m_0, d = p,$$

l'équation ci-dessus devient

$$A[P.\omega\delta_1 p]^2 + B[P.\omega\delta_2 p]^2 + C[P.\omega\delta_3 p]^2 = 0,$$

qui, avec l'équation

$$P.m_0 p = 0,$$

représente les plans tangents au cône.

On traiterait d'une manière analogue tous les cas de dégénérescence.

Déterminons maintenant la section d'une quadrique par un plan ϖ.

Nous avons exposé un calcul biquaternionien présentant par rapport à la Géométrie plane les mêmes propriétés que le calcul des triquaternions par rapport à la Géométrie dans l'espace.

On pourra donc représenter une conique située dans un plan ϖ par une équation de la forme

$$P n \varphi_\varpi(n) = 0,$$

où n représente la droite perpendiculaire au plan ϖ menée par un point de ce plan, et $\varphi_\varpi(n)$ une droite du plan ϖ fonction linéaire homogène de n.

Déterminons une équation de la forme ci-dessus qui représente la section de la quadrique (1) par le plan ϖ.

Soit m un point de cette section et n la droite menée par m perpendiculairement au plan ϖ. On a

$$m = -\varpi^2 m = -\varpi \mathrm{I}_\varpi m - \varpi \mathrm{P} \varpi m$$
$$= \varpi n.$$

L'équation (6) devient donc pour les points du plan ϖ

$$\mathrm{P}.\varpi n \varphi(\varpi n) = 0$$

ou

$$\mathrm{P}.n\varpi\varphi(\varpi n) = 0.$$

L'expression $\varpi\varphi(\varpi n)$ représente l'intersection du plan $\varphi(m)$ et du plan ϖ et par suite est une droite de ce dernier plan. C'est la fonction $\varphi_\varpi(n)$ cherchée.

La réduction de $\varphi_\varpi(n)$ à une forme canonique pourra toujours être opérée en mettant en évidence dans cette fonction soit un triangle autopolaire, soit le centre et les axes, soit les asymptotes, soit les foyers, etc., et cela par des moyens semblables à ceux que nous indiquerons pour les surfaces.

Déterminons l'équation du cône circonscrit à une quadrique et ayant pour sommet un point donné m_0.

Ce cône est une quadrique passant par l'intersection de la quadrique (6) et du plan polaire $\varphi(m_0)$. Son équation est donc de la forme

$$x\mathrm{P}m\varphi(m) + [\mathrm{P}m\varphi(m_0)]^2 = 0$$

ou

$$\mathrm{P}.m[x\varphi(m) + \varphi(m_0)\mathrm{P}m\varphi(m_0)] = 0.$$

La fonction

$$x\varphi(m) + \varphi(m_0)\mathrm{P}m\varphi(m_0)$$

doit avoir son invariant λ nul. Mais, comme nous connaissons déjà le sommet m_0 du cône, il suffit d'écrire

$$x\varphi(m_0) + \varphi(m_0)\,\mathrm{P}m_0\varphi(m_0) = 0,$$

condition qui, grâce au facteur commun $\varphi(m_0)$, est satisfaite par

$$x = -\mathrm{P}m_0\varphi(m_0).$$

La fonction linéaire homogène relative au cône sera donc

$$\varphi(m)\,\mathrm{P}m_0\varphi(m_0) - \varphi(m_0)\,\mathrm{P}m\varphi(m_0).$$

Déterminons les points d'intersection d'une droite donnée δ avec la quadrique (6).

Cette détermination peut être faite de plusieurs manières. Nous choisirons celle qui utilise le calcul que nous avons exposé dans le premier paragraphe de ce Chapitre et qui joue par rapport à la Géométrie rectiligne le même rôle que le calcul des biquaternions par rapport à la Géométrie plane.

Représentons chaque point m de la droite δ par le plan p mené par ce point perpendiculairement à δ. Pour déterminer les points d'intersection de δ avec la quadrique (1), nous allons rechercher une équation de la forme

$$\mathrm{L}p\varphi_\delta(p) = 0,$$

où $\varphi_\delta(p)$ représente un plan perpendiculaire à δ et fonction linéaire homogène de p.

Pour tout point m de la droite δ on a

$$\begin{aligned} m &= -\delta^2 m = -\delta\mathrm{L}\delta m - \delta\mathrm{P}\delta m \\ &= \delta p. \end{aligned}$$

L'équation de la quadrique (6) peut donc s'écrire pour tout point δp de la droite δ

$$\mathrm{P}.\delta p\varphi(\delta p)=0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{P}.\delta \mathrm{L}p\varphi(\delta p)=0.$$

Décomposons le plan $\varphi(\delta p)$ en un plan perpendiculaire à δ et un autre passant par cette droite

$$\varphi(\delta p)=-\delta^2\varphi(\delta p)=-\delta \mathrm{L}\delta\varphi(\delta p)-\delta \mathrm{P}\delta\varphi(\delta p).$$

Le second terme donnera lieu dans l'équation précédente à un terme nul. Car, si on le désigne par p', $\mathrm{L}pp'$ représentera une droite du plan p', c'est-à-dire une droite rencontrant δ.

L'équation en p deviendra donc

$$\mathrm{P}\left[\delta \mathrm{L}.p\delta \mathrm{L}\delta\varphi(\delta p)\right]=0,$$

ou

$$\omega\delta \mathrm{L}.p\delta \mathrm{L}\delta\varphi(\delta p)=0,$$

ou enfin

$$\mathrm{L}.p\delta \mathrm{L}\delta\varphi(\delta p)=0.$$

La fonction $\varphi_\delta(p)$ cherchée est donc

$$\varphi_\delta(p)\equiv\delta \mathrm{L}\delta\varphi(\delta p).$$

L'expression $\mathrm{L}\delta\varphi(\delta p)$ représente le point d'intersection de la droite δ et du plan polaire $\varphi(\delta p)$ du point δp, de sorte que $\varphi_\delta(p)$ représente le plan mené par ce point d'intersection perpendiculairement à la droite δ.

L'équation du second degré

$$\mathrm{L}p\varphi_\delta(p)=0$$

donnera deux valeurs pour p.

Ces deux valeurs se confondent s'il existe un plan p_0 perpendiculaire à δ pour lequel on ait

$$\varphi_\delta(p_0) = 0 \qquad \text{ou} \qquad L\delta\varphi(\delta p_0) = 0,$$

relation qui exprime que le plan $\varphi(\delta p_0)$, polaire du point δp_0 par rapport à la quadrique, contient la droite δ.

Enfin la droite δ sera située tout entière sur la surface, si l'équation est satisfaite identiquement, c'est-à-dire si l'on a

$$\varphi_\delta(p) \equiv 0 \qquad \text{ou} \qquad L\delta\varphi(\delta p) \equiv 0,$$

relation qui exprime en somme que la droite conjuguée de δ par rapport à la quadrique se confond avec δ.

Déterminons les cônes du second degré passant par l'intersection de deux quadriques données.

Si φ et φ_1 représentent les fonctions linéaires correspondantes à deux quadriques, la fonction linéaire correspondante à une quadrique passant par l'intersection des deux premières est de la forme

$$x\varphi + y\varphi_1,$$

x et y étant des coefficients numériques.

On peut déterminer le rapport $\frac{x}{y}$ de manière que cette fonction représente un cône. On a ainsi quatre valeurs pour $\frac{x}{y}$. Soit m_0 le sommet d'un des cônes ainsi obtenus. On aura

$$x\varphi(m_0) + y\varphi_1(m_0) = 0.$$

Si ce point m_0 est situé sur la quadrique φ, c'est-à-dire si l'on a

$$\mathrm{P}m_0\varphi(m_0) = 0,$$

il en résulte

$$\mathrm{P}\, m_0 \varphi_1 (m_0) = 0,$$

c'est-à-dire qu'il est également situé sur la quadrique φ_1.

Les plans tangents en m_0, $\varphi(m_0)$ et $\varphi_1(m_0)$ se confondent en position et par suite les deux quadriques sont tangentes.

On peut mettre la fonction φ relative à une quadrique sous la forme

$$\varphi(m) = \mathrm{A} p_1 \mathrm{P} p_1 m + \mathrm{B} p_2 \mathrm{P} p_2 m + \mathrm{C} p_3 \mathrm{P} p_3 m + \mathrm{D} p_4 \mathrm{P} p_4 m,$$

en choisissant pour p_1, p_2, p_3, p_4 quatre plans déterminant un tétraèdre autopolaire.

On peut aussi mettre l'équation de la quadrique sous la forme suivante mettant en évidence les génératrices rectilignes

$$\mathrm{P}.mp_1 \mathrm{P} mp_2 - \mathrm{P} mp'_1 \mathrm{P} mp'_2 = 0,$$

équation qui peut s'écrire

$$\mathrm{P}\, m (p_1 \mathrm{P} mp_2 - p'_1 \mathrm{P} mp'_2) = 0.$$

L'expression entre parenthèses ne représente pas une fonction autoconjuguée.

La fonction qui lui est conjuguée a pour expression

$$p_2 \mathrm{P} mp_1 - p'_2 \mathrm{P} mp'_1.$$

La somme de ces deux fonctions est autoconjuguée et peut être identifiée, à un facteur numérique près, à toute fonction autoconjuguée φ relative à la quadrique considérée.

Si la fonction φ est donnée sous une forme quelconque, on obtiendra les génératrices rectilignes en choisissant pour p_1 et p'_1 deux plans tangents

et en déterminant p_2 et p'_2 au moyen de l'identité

$$p_1 \mathrm{P} m p_2 + p_2 \mathrm{P} m p_1 - p'_1 \mathrm{P} m p'_2 - p'_2 \mathrm{P} m p'_1 \equiv \varphi(m).$$

Nous n'avons jusqu'ici envisagé que les propriétés des quadriques qui ne mettent en œuvre que les notions projectives, savoir l'intersection, le contact, le plan, la droite et le rapport anharmonique.

Nous avons suffisamment montré qu'à ce point de vue le calcul des triquaternions n'a aucune difficulté à suivre pas à pas la Géométrie analytique.

Nous allons, en terminant, dire quelques mots des propriétés des quadriques où intervient le plan de l'infini et enfin des propriétés métriques, c'est-à-dire de celles qui dépendent du cercle imaginaire de l'infini.

Les premières sont liées aux notions d'asymptotes, de centre et de directions conjuguées, éléments qu'il s'agit d'abord de déterminer.

Les directions asymptotiques sont données par l'intersection de la quadrique avec le plan de l'infini ω.

Si ρ représente un vecteur, c'est-à-dire un point de l'infini, $\varphi(\rho)$ représente le plan polaire de ce point, $\omega\varphi(\rho)$ représentera une fonction vectorielle de ρ, et, posant

$$\omega\varphi(\rho) \equiv \varphi_1(\rho),$$

l'équation des directions asymptotiques sera l'équation

$$\mathrm{S}.\rho, \varphi_1(\rho) = 0.$$

Le centre de la quadrique φ est déterminé par

$$\varphi(m) = \omega, \tag{10}$$

équation qu'on sait résoudre d'après le paragraphe précédent.

Le point m_0 ainsi obtenu peut se réduire à un vecteur, c'est-à-dire être rejeté à l'infini. C'est le cas des paraboloïdes.

Lorsque l'invariant projectif λ de φ est nul, il existe un point m_0 tel que l'on a

$$\varphi(m_0) = 0,$$

et ce point m_0, étant le pôle de tous les plans de l'espace, pourra être considéré en particulier comme le pôle du plan de l'infini. La surface est un cône de sommet m_0.

Le point m_0 peut être lui-même à l'infini, et le plan ω, second membre de l'équation (10), contient alors le point m_0. Nous avons vu dans le paragraphe précédent que dans ce cas l'équation (10) a une infinité de solutions représentées par des points situés sur une droite passant par le point à l'infini m_0. C'est le cas des cylindres.

La notion de directions conjuguées résulte de celle des plans polaires des points de l'infini.

A tout vecteur ρ correspond un plan polaire $\varphi(\rho)$ passant évidemment par le centre de la quadrique. Ce plan polaire peut aussi être défini comme plan diamétral des cordes parallèles à la direction ρ.

En effet, soit m le milieu d'une de ces cordes. Tout point de cette corde sera de la forme

$$m + x\rho.$$

Les deux points d'intersection de la corde avec la quadrique seront donnés par l'équation

$$\mathbf{P}.(m + x\rho)\varphi(m + x\rho) = 0$$

ou

$$x^2\mathbf{P}.\rho\varphi(\rho) + 2x\mathbf{P}.m\varphi(\rho) + \mathbf{P}.m\varphi(m) = 0. \tag{11}$$

En écrivant que cette équation a ses racines égales et de signes contraires, on a

$$\mathbf{P}.m\varphi(\rho) = 0,$$

qui exprime que le lieu cherché est bien le plan $\varphi(\rho)$.

De l'équation (11) on déduit également l'équation des directions asymptotiques

$$\mathrm{P}.\rho\varphi(\rho)=0 \qquad \text{équivalente à} \qquad \mathrm{S}.\rho,\omega\varphi(\rho)=0.$$

Écrivons enfin que l'équation (11) a ses racines égales

$$[\mathrm{P}m\varphi(\rho)]^2 - \mathrm{P}\rho\varphi(\rho)\,\mathrm{P}m\varphi(m)=0.$$

Cette équation, en y considérant ρ comme variable, représente les directions du cône circonscrit à la quadrique et ayant son sommet en m.

En prenant au contraire m comme variable, cette équation est celle du cylindre circonscrit à la quadrique et ayant ses génératrices parallèles à ρ.

On peut aussi chercher le lieu des centres des sections parallèles.

Soit m le centre de la section de la surface par un plan ϖ, c'est-à-dire le pôle de la droite de l'infini $\omega\varpi$ du plan ϖ par rapport à la conique d'intersection.

On a vu que la polaire d'un point m du plan ϖ par rapport à cette conique est

$$\mathrm{L}\varpi\varphi(m).$$

On doit donc avoir

$$\mathrm{L}\varpi\varphi(m)=x\,\omega\varpi,$$

formule qui exprime que les plans ϖ et $\varphi(m)$ sont parallèles, et par suite que le lieu du centre m se confond avec le lieu du pôle du plan ϖ.

Les propriétés métriques des quadriques s'établissent par des procédés analogues.

Les directions axiales s'obtiennent par la condition d'être normales à leurs directions conjuguées.

Les sections cycliques s'obtiennent comme plans passant par les génératrices communes d'un cône asymptotique à la surface et du cône des droites isotropes de même sommet.

Soit ρ une droite passant par un point fixe arbitraire.

Le cône asymptotique a une équation de la forme

$$\mathbf{P}\rho\varphi_1(\rho) = 0,$$

où $\varphi_1(\rho)$ est un vecteur.

Le cône isotrope de même sommet a pour équation

$$\rho^2 = 0.$$

La fonction linéaire relative à un cône du second ordre de même sommet que les précédents et passant par leurs droites d'intersection est de la forme

$$x\varphi_1(\rho) + y\rho.$$

En annulant le déterminant de cette fonction, on aura trois valeurs pour $\frac{x}{y}$, à chacune desquelles correspondra un couple de directions de sections cycliques réelles ou imaginaires.

Quant aux foyers, c'est-à-dire aux points tels que le cône circonscrit à la surface et ayant un de ces points pour sommet soit bitangent au cône de même sommet formé par les directions isotropes, on les obtiendra en écrivant que le cône

$$\mathbf{P}.\,\rho\left[\varphi_1(\rho)\,\mathbf{P}m_0\varphi(m_0) - \omega\varphi(m_0)\,\mathbf{P}\rho\varphi(m_0)\right] = 0$$

est bitangent au cône

$$\rho^2 = 0.$$

On obtiendra ainsi deux équations en m_0, qui détermineront les lignes focales.

Nous ne pousserons pas plus loin cette étude, qui nous a suffi pour exposer les procédés principaux par lesquels le calcul des triquaternions peut se substituer à la Géométrie analytique dans ses questions initiales.

Le caractère très élémentaire des questions traitées a eu l'avantage de

ne point exiger préliminairement un exposé, forcément long, des moyens dont il y a lieu de doter ce calcul pour qu'il satisfasse à toutes les exigences de l'Analyse.

Ces moyens sont, d'une façon générale, communs à tous les calculs complexes.

L'Analyse infinitésimale notamment prend, dans ces calculs, un aspect tout particulier, qui a inspiré de remarquables travaux à Grassmann.

Nous indiquerons également la nécessité d'établir une théorie de l'élimination d'une quantité complexe entre plusieurs équations, et même dans une seule équation complexe, notamment en ce qui concerne les équations linéaires, dont les types sont si nombreux.

ANNEXE.

SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DU PRODUIT DE DEUX TRIQUATERNIONS.

Produit de deux éléments linéaires.

$$l = \mu x_0 + \rho + \omega \rho_1,$$
$$l' = \mu x'_0 + \rho' + \omega \rho'_1,$$
$$ll' = x_0 x'_0 + \mathrm{S}\rho\rho' + \mathrm{V}\rho\rho' + \omega\left[\mathrm{V}.(\rho\rho'_1 + \rho_1\rho') + x'_0\rho_1 - x_0\rho'_1\right] + \mu\left(x_0\rho' + x'_0\rho\right) + \omega\,\mathrm{S}.(\rho\rho'_1 + \rho_1\rho').$$

On a donc

$$\mathrm{G}ll' = x_0 x'_0 + \mathrm{S}\rho\rho',$$
$$\mathrm{L}ll' = \mathrm{V}\rho\rho' + \omega\left[\mathrm{V}.(\rho\rho'_1 + \rho_1\rho') + x'_0\rho_1 - x_0\rho'_1\right],$$
$$\mathrm{P}ll' = \mu\left(x_0\rho' + x'_0\rho\right) + \omega\,\mathrm{S}.(\rho\rho'_1 + \rho_1\rho').$$

L.ll'. — On voit que Lll' représente un complexe dont l'axe est per-

pendiculaire à ceux de l et l'; car $V\rho\rho'$ qui donne la direction de l'axe est perpendiculaire à ρ et à ρ'.

$L.l^2 = 0$. — Si l'on fait $l' = l$, $L.ll'$ s'annule.

$L\,mm'$. — Si les deux facteurs sont des points

$$m = \mu x_0 + \omega\rho_1,$$
$$m' = \mu x'_0 + \omega\rho'_1,$$

on a

$$L\,mm' = x'_0\rho_1 - x_0\rho'_1 = x_0x'_0\left(\frac{\rho_1}{x_0} - \frac{\rho'_1}{x'_0}\right).$$

C'est le vecteur allant du point m' au point m multiplié par les masses des deux points.

$L.\gamma\gamma'$. — Si les deux facteurs sont des complexes

$$\gamma = \rho + \omega\rho_1,$$
$$\gamma' = \rho' + \omega\rho'_1,$$

on a

$$L\gamma\gamma' = V\rho\rho' + \omega V(\rho\rho'_1 + \rho_1\rho'),$$

complexe dont l'axe est rectangulaire avec ceux de γ et de γ', et qui est en involution avec ces deux complexes. On vérifie notamment que l'on a

$$P.\gamma L\gamma\gamma' = P.\gamma(\gamma\gamma' - G\gamma\gamma' - P\gamma\gamma') = P.\gamma^2\gamma'$$
$$= P(G\gamma^2 + L\gamma^2 + P.\gamma^2)\gamma' = 0.$$

Il résulte de là que $L\gamma\gamma'$ satisfait à quatre relations importantes

$$G.\gamma L\gamma\gamma' = 0, \qquad G.\gamma' L\gamma\gamma' = 0,$$
$$P.\gamma L\gamma\gamma' = 0, \qquad P.\gamma' L\gamma\gamma' = 0.$$

L.dd'. — Si les deux facteurs sont des droites, c'est-à-dire si l'on fait dans le cas précédent les hypothèses

$$S\rho\rho_1 = 0, \qquad S\rho'\rho'_1 = 0,$$

le produit est un complexe dont l'axe est la perpendiculaire commune aux deux droites et dont le paramètre (ou automoment) est égal à la distance des deux droites multipliée par la cotangente de leur angle.

Pour le voir, soient i, j, k trois droites formant un trièdre trirectangle. Prenons i pour l'une des droites, et supposons que k soit la perpendiculaire commune aux deux droites, c'est-à-dire que la seconde droite rencontre k et soit parallèle au plan déterminé par i et j. Cette droite aura une expression de la forme

$$i\cos\theta + j\sin\theta + \omega e(j\cos\theta - i\sin\theta),$$

θ étant l'angle des deux droites et e leur distance.

Nous donnons aux deux droites des tenseurs égaux à l'unité. Il suffira, en effet, de multiplier le résultat par les tenseurs des facteurs.

On a

$$L.i[i\cos\theta + j\sin\theta + \omega e(j\cos\theta - i\sin\theta)] = k\sin\theta(1 + \omega e\operatorname{cotg}\theta),$$

qui est bien le résultat annoncé.

Le tenseur du complexe est $\sin\theta$; il est nul lorsque les deux droites sont parallèles et, dans ce cas, le complexe se réduit à un vecteur

$$\omega k e\cos\theta,$$

qui lui-même est nul, si les deux droites se confondent.

L.dd' se réduit à une droite, si d et d' sont rectangulaires.

Revenons au produit de deux complexes et posons

$$\gamma = \delta + \omega\,\delta\eta,$$
$$\gamma' = \delta' + \omega\delta'\eta',$$

δ et δ' étant les axes des complexes. On a

$$\mathrm{L}\gamma\gamma' = \mathrm{L}\,\delta\delta' + \omega\,\mathrm{L}\,\delta\delta'\,(\eta_1 + \eta_1').$$

Ce complexe a le même axe que $\mathrm{L}\delta\delta'$, c'est-à-dire a pour axe la perpendiculaire commune aux axes des deux facteurs γ et γ'.

Remarquons enfin que l'on a

$$\mathrm{L}\gamma^2 = 0, \qquad \mathrm{L}\,d^2 = 0.$$

$\mathrm{L}\,dm$. — Posons

$$d = k, \qquad m = \mu + \omega\rho,$$
$$\mathrm{L}\,dm = \omega\,\mathrm{V}\,k\rho.$$

C'est le vecteur perpendiculaire au plan déterminé par le point et la droite pris avec une longueur égale à la distance du point à la droite.

Si d représente en position et en grandeur un axe de rotation, $\mathrm{L}\,dm$ représente, en grandeur et en direction, la vitesse du point m, le tenseur de ce point étant supposé égal à l'unité.

$\mathrm{L}\gamma m$. — Posons

$$\gamma = \delta + \omega\,\delta\eta_1.$$

On a

$$\mathrm{L}\gamma m = \mathrm{L}.\,\delta m + \omega\,\delta\eta_1\,\mathrm{T}m.$$

Si $\mathrm{T}m = 1$, $\mathrm{L}\gamma m$ représente la vitesse du point m dans le mouvement caractérisé à l'instant considéré par le complexe γ.

Cherchons la condition géométrique exprimée par

$$\mathrm{L}\,ll' = 0.$$

Prenons

$$l' = \mu x_0' + a\,k.$$

L'expression de $\mathrm{L}\,ll'$ devient

$$\mathrm{L}\,ll' = a\,\mathrm{V}\,\rho k + \omega\,(a\,\mathrm{V}\,\rho_1 k + x_0'\rho_1).$$

On doit donc avoir

$$V\rho k = 0, \qquad aV\rho_1 k + x'_0\rho_1 = 0.$$

La première condition donne

$$\rho = xk,$$

x étant une quantité ordinaire.

La seconde condition ne peut être réalisée que par

$$\rho_1 = 0,$$

après exclusion du cas où l'on aurait à la fois

$$x'_0 = 0, \qquad a = 0,$$

c'est-à-dire $l' = 0$.

On a donc

$$l = \mu x_0 + xk,$$

c'est-à-dire que les points des deux éléments linéaires coïncident ainsi que leurs axes, la masse et la longueur pouvant être différentes pour les deux éléments.

Si l'un des éléments est une droite, c'est-à-dire si son point est nul, l'autre élément doit avoir son point sur cette droite et son axe dirigé suivant cette droite. En particulier, si l'un des facteurs est un point m et l'autre une droite d, la relation

$$Ldm = 0$$

exprime que le point est situé sur la droite, conformément d'ailleurs à la signification que nous avons trouvée pour Ldm.

Pll'. — On a, d'après l'expression trouvée pour ll',

$$Pll' = \mu(x_0\rho' + x'_0\rho) + \omega S(\rho\rho'_1 + \rho_1\rho').$$

C'est un plan perpendiculaire à la résultante des deux axes $\frac{\rho}{x_0}$ et $\frac{\rho'}{x'_0}$ des deux éléments linéaires.

Si cette résultante est nulle, c'est-à-dire si les axes forment un couple, le plan est rejeté à l'infini, et il sera nul si l'on a

$$S(\rho\rho'_1 + \rho_1\rho') = 0$$

ou

$$S(x_0\rho\rho'_1 - x'_0\rho_1\rho) = S.\rho(x_0\rho'_1 - x'_0\rho_1) = 0.$$

Cette relation exprime que

$$\frac{\rho'_1}{x'_0} - \frac{\rho'_1}{x_0}$$

est perpendiculaire à ρ.

Une figure montrera facilement qu'il est nécessaire que les points de l et l' soient situés dans le même plan perpendiculaire à ρ.

L'autre cas où le plan Pll' est rejeté à l'infini est celui où x_0 et x'_0 sont nuls, c'est-à-dire où les deux facteurs sont des complexes γ et γ'.

$P.\gamma\gamma'$. — On a dans ce cas

$$P\gamma\gamma' = \omega S(\rho\rho'_1 + \rho_1\rho') = -\omega T\gamma T\gamma' \mathfrak{M},$$

$\mathfrak{M}$ étant le moment des deux complexes.

Pdd'. — Si les complexes sont des droites, $\mathfrak{M}$ est, comme on sait, égal au produit de leur distance par le sinus de leur angle.

Les relations

$$P.\gamma\gamma' = 0, \qquad Pdd' = 0$$

expriment respectivement que les complexes γ et γ' sont en involution et que les droites d et d' se rencontrent.

$P\gamma^2$. — On a

$$P\gamma^2 = -2\omega S\rho\rho_1.$$

C'est le produit par ω du carré du tenseur de γ et du paramètre (ou automoment) de ce complexe.

$Pd^2 = o$. — La condition

$$P\gamma^2 = o$$

exprime que γ est une droite.

Pmd. — Si l'un des facteurs est un point m et l'autre une droite d, on a

$$P.md = \mu x_0 \rho' + \omega S\rho\rho'_1.$$

C'est un plan perpendiculaire à la droite d et passant par le point m.

$Pm\gamma$. — Plan mené par le point m perpendiculairement à l'axe de γ.

Pl^2. — On a

$$l^2 = x_0^2 + \rho^2 + 2(x_0\mu\rho + \omega S\rho\rho_1).$$

D'où

$$Gl^2 = x_0^2 + \rho^2$$
$$Pl^2 = 2(x_0\mu\rho + \omega S\rho\rho_1).$$

Pl^2 représente le plan perpendiculaire à la direction de l et passant par le point de l.

La condition

$$Pl^2 = o$$

exige que l'on ait

$$x_0 = o \quad \text{ou} \quad \rho = o,$$

c'est-à-dire que l soit un point ou une droite.

Remarquons que les tenseurs du point et de la droite de l peuvent s'exprimer en fonction de Gl^2 et de $(Tl)^2$ (qu'on écrira généralement $T^2 l$). On a d'ailleurs

$$Tl^2 = \sqrt{(x_0^2 + \rho^2)^2 - 4x_0^2\rho^2} = x_0^2 - \rho^2$$
$$= T^2 l.$$

Gll'. — On a

$$Gll' = x_0 x_0' + S\rho\rho'.$$

Remarquons seulement les trois formules

$$Gmd = 0, \qquad Gmm' = Tm'Tm', \qquad Gdd' = -Td'Td'\cos(d,d').$$

La nullité de Gdd' exprime que les deux droites d et d' sont rectangulaires.

Produit de deux plans.

Soient

$$p = \mu\rho + \omega w,$$
$$p' = \mu\rho' + \omega w'.$$

Gpp', Lpp'. — On a

$$pp' = Tp\,Tp'\,[-\cos(p,p') + \delta\sin(p,p')]$$
$$Gpp' = -Tp\,Tp'\cos(p,p').$$
$$Lpp' = Tp\,Tp'\,\delta\sin(p,p'),$$

où δ est la droite d'intersection des deux plans p et p' et (p,p') leur angle, c'est-à-dire l'angle déterminé par la rotation positive autour de δ qui amène le côté positif de p en coïncidence avec le côté positif de p'.

Le sens de la rotation positive autour d'une droite dirigée est donné par les conventions déjà faites, de sorte que, si l'on choisit arbitrairement un sens positif sur la droite d'intersection, il en résultera pour $\sin(p,p')$ un signe qui changera avec le sens choisi pour δ. Mais le produit $\delta\sin(p,p')$ est bien déterminé en grandeur et en direction. Sa direction est en somme celle qui donne à $\sin(p,p')$ une valeur positive.

Produit d'un élément linéaire et d'un plan.

Soient

$$l = \mu x_0' + \rho + \omega\rho_1,$$
$$p = \mu\alpha + \omega w.$$

On a

$$lp = \mu \mathrm{S}\rho\alpha + x_0\alpha + \omega(w\rho + \mathrm{V}\rho_1\alpha) + \mu \mathrm{V}\rho\alpha + \omega \mathrm{S}\rho_1\alpha - \omega x_0 w.$$

$\mathrm{G}lp = 0$. — On a donc

$$\mathrm{G}lp = 0,$$

$$\mathrm{L}lp = \mu \mathrm{S}\rho\alpha + x_0\alpha + \omega(w\rho + \mathrm{V}\rho_1\alpha).$$

$\mathrm{L}lp$. — L'axe de cet élément linéaire est $x_0\alpha$ et par conséquent est perpendiculaire au plan p. Supposons que le plan p passe par l'origine, c'est-à-dire que l'on ait

$$w = 0.$$

Le coefficient de ω se réduit à $\mathrm{V}\rho_1\alpha$, vecteur situé dans le plan p, de sorte que le point de $\mathrm{L}lp$ est également situé dans ce plan.

$\mathrm{L}mp$. — Si l se réduit à un point m, on a

$$\mathrm{L}mp = x_0\alpha + \omega \mathrm{V}\rho_1\alpha,$$

droite perpendiculaire au plan p et passant par le point m. Car on vérifie directement que l'on a

$$\mathrm{L}.m\mathrm{L}mp = 0.$$

$\mathrm{L}dp$. — Si l se réduit à une droite d, on a

$$\mathrm{L}dp = \mu\delta\rho\alpha + \omega(w\rho + \mathrm{V}\rho_1\alpha).$$

On peut supposer que la droite d et le plan p passent tous deux à l'origine, c'est-à-dire que l'on a

$$w = 0, \qquad \rho_1 = 0.$$

L'expression précédente devient

$$\mu \mathrm{S}\rho\alpha$$

et l'on voit que, abstraction faite des tenseurs qui sont toujours en multiplicateurs dans le produit, Ldp est le point d'intersection de la droite et du plan pris avec une masse négative et ayant pour valeur absolue le sinus de l'angle de la droite et du plan.

Si la droite est parallèle au plan, on a

$$S\rho\alpha = o,$$

et l'expression de Ldp devient

$$\omega(\omega\rho + V\rho_1\alpha).$$

ρ_1 étant, comme α, rectangulaire avec ρ, $V\rho_1\alpha$ est de la forme $x\rho$, et Ldp est un vecteur dont la direction est contenue dans le plan p. Quant à sa longueur, on voit géométriquement qu'elle est égale à la distance de la droite au plan, toujours abstraction faite des tenseurs des facteurs.

Lγp. — C'est le foyer du plan p par rapport au complexe γ (*voir* p. 68).

La relation

$$Ldp = o$$

exprime évidemment que la droite d est située dans le plan p.

Plp. — On a

$$Plp = \mu V\rho\alpha + \omega(S\rho_1\alpha - x_0\omega).$$

C'est un plan perpendiculaire au plan p et parallèle à l'axe de l.

Pdp. — Si l se réduit à une droite d, c'est-à-dire si $x_0 = o$, on a

$$Pdp = \mu V\rho\alpha + \omega S\rho_1\alpha$$

et l'on peut vérifier que

$$\mathrm{L}.d\mathrm{P}dp = \mathrm{o},$$

c'est-à-dire que $\mathrm{P}dp$ est le plan mené par d perpendiculairement au plan p. Son tenseur est égal au cosinus de l'angle de la droite et du plan, de sorte que

$$\mathrm{P}dp = \mathrm{o}$$

exprime que la droite d est perpendiculaire à p.

$\mathrm{P}mp$. — Si l se réduit à un point $m = \mu x_0 + \omega \rho_1$, on a

$$\mathrm{P}mp = \omega(\mathrm{S}\rho_1 \alpha - x_0 w).$$

Supposons le point m à l'origine. On a $\mathrm{P}mp = -\omega x_0 w$, où $-w$ est le produit de $\mathrm{T}p$ par la distance du point m au plan p.

FORMULES FONDAMENTALES DU CALCUL.

$$
\text{(I)}\qquad
\begin{cases}
G\ell\ell' = G\ell'\ell, & L\ell\ell' = -L\ell'\ell, & P\ell\ell' = P\ell'\ell,\\
Glp = 0, & Llp = Lpl, & Plp = -Ppl,\\
Gpp' = Gp'p, & Lpp' = -Lp'p, & Ppp' = 0,
\end{cases}
$$

SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DU PRODUIT DE DEUX TRIQUATERNIONS.

Les tenseurs sont supposés égaux à l'unité :

μ et μ' représentent des points.
δ et δ' » des droites.
ϖ et ϖ' » des plans.

$G\mu\mu' \equiv 1$

$G\mu\delta \equiv 0$

$G\delta\delta'$ Cosinus changé de signe de l'angle des deux droites.

$G\mu\varpi \equiv 0$

$G\delta\varpi \equiv 0$

$G\varpi\varpi'$ Cosinus changé de signe de l'angle des deux plans.

$L\mu\mu'$ Vecteur de μ' vers μ.

$L\mu\delta$ Vecteur perpendiculaire au plan contenant le point et la droite, tenseur égal à la distance du point à la droite.

$L\delta\delta'$ Complexe ayant pour axe la perpendiculaire commune et pour automoment le produit de la plus courte distance par la cotangente de l'angle.

$L\mu\varpi$ Perpendiculaire menée par μ au plan ϖ.

$L\delta\varpi$ Point d'intersection de la droite et du plan, tenseur égal au sinus de l'angle de la droite et du plan.

$L\varpi\varpi'$ Droite d'intersection, tenseur égal au sinus de l'angle.

$P\mu\mu' \equiv 0$

$P\mu\delta$ Plan mené par μ perpendiculairement à δ.

$P\delta\delta'$ Symbole du plan de l'infini ϖ multiplié par la plus courte distance et par le sinus de l'angle des deux droites.

$P\mu\varpi$ Symbole du plan de l'infini multiplié par la distance de μ à ϖ et pris avec le signe positif ou négatif, suivant que le point μ est situé du côté de la face positive ou de la face négative du plan ϖ.

$P\delta\varpi$ Plan mené par la droite perpendiculairement au plan, tenseur égal au sinus de l'angle de la droite et de la direction positive de la normale au plan.

$P\varpi\varpi' \equiv 0$.

Vu et approuvé :

Paris, le 25 octobre 1901,

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 25 octobre 1901,

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

TABLE ANALYTIQUE.

INTRODUCTION.

Pages.

Objet du Mémoire..... 1
Systèmes numériques complexes..... 2
Calcul des quaternions..... 5
Rotations autour d'un point fixe..... 7
Déplacements sans déformation et biquaternions..... 10

CHAPITRE I.

PRINCIPES DU CALCUL DES TRIQUATERNIONS.

Système numérique complexe des triquaternions..... 15
Règles fondamentales du calcul..... 19
Inverse d'un triquaternion..... 29
Transformations par similitude..... 33
Éléments linéaires..... 36

CHAPITRE II.

DÉPLACEMENTS SANS DÉFORMATION.

Paramètres et équations d'un déplacement..... 40
Décompositions diverses d'un déplacement..... 48
Mouvement continu d'un corps solide..... 52
Équilibre et dynamique des corps solides..... 60

CHAPITRE III.

COMPLEXES LINÉAIRES.

Équation d'un complexe. Décompositions diverses..... 63
Foyer et plan focal..... 67
Droites rectangulaires avec leurs conjuguées..... 69

CHAPITRE IV.

SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

Nouvelles notations..... 76
Transformations projectives..... 81
Surface du second degré..... 93

ANNEXE.

Signification géométrique du produit de deux triquaternions..... 107

Formules fondamentales du calcul..... 118

DEUXIÈME THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Sur l'ouvrage de Hertz : *Die Prinzipien der Mechanik* in neuem *Zusammenhange dargestellt.*

Vu et approuvé :

Paris, le 25 octobre 1901,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. DARBOUX.

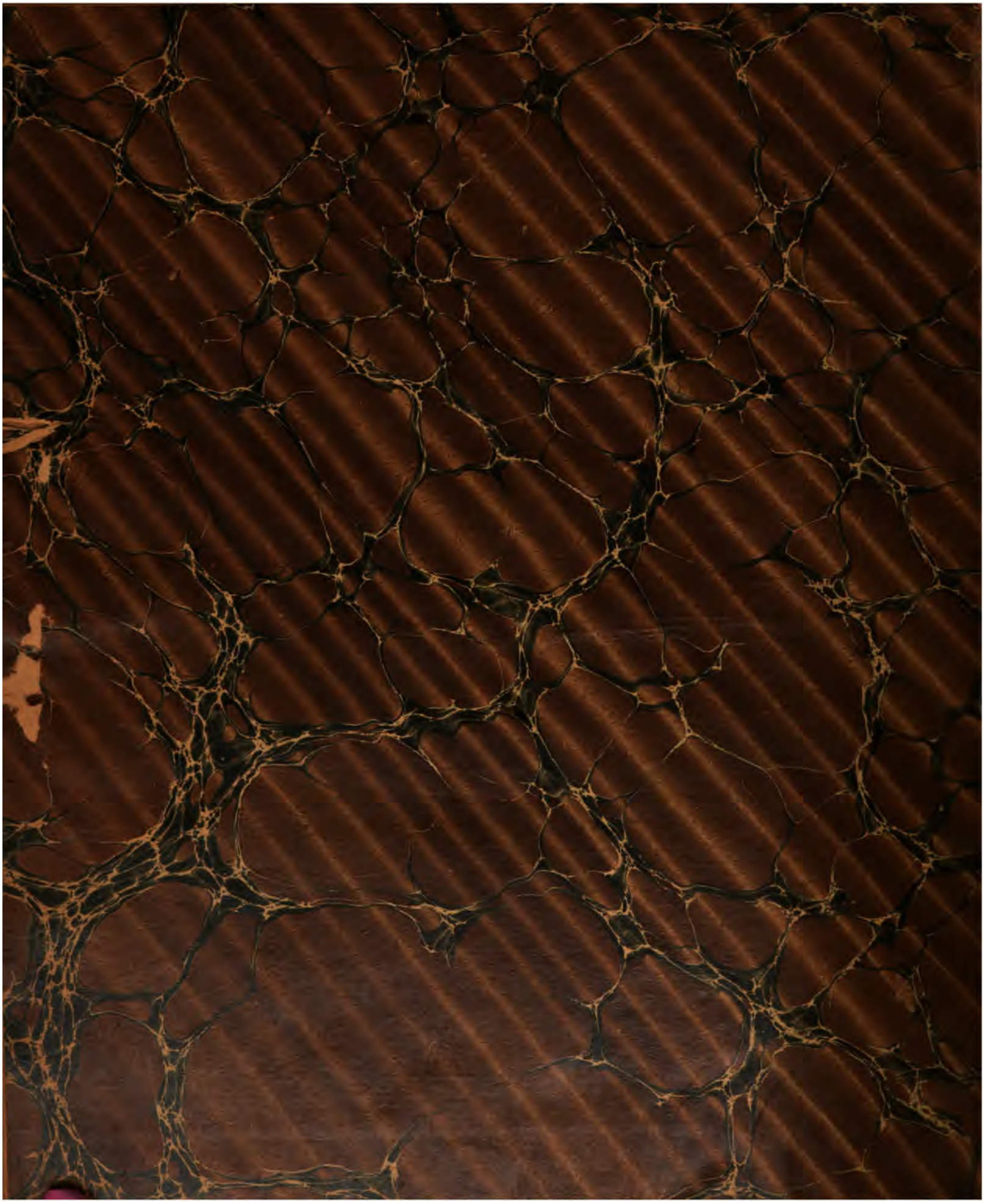
Vu et permis d'imprimer :

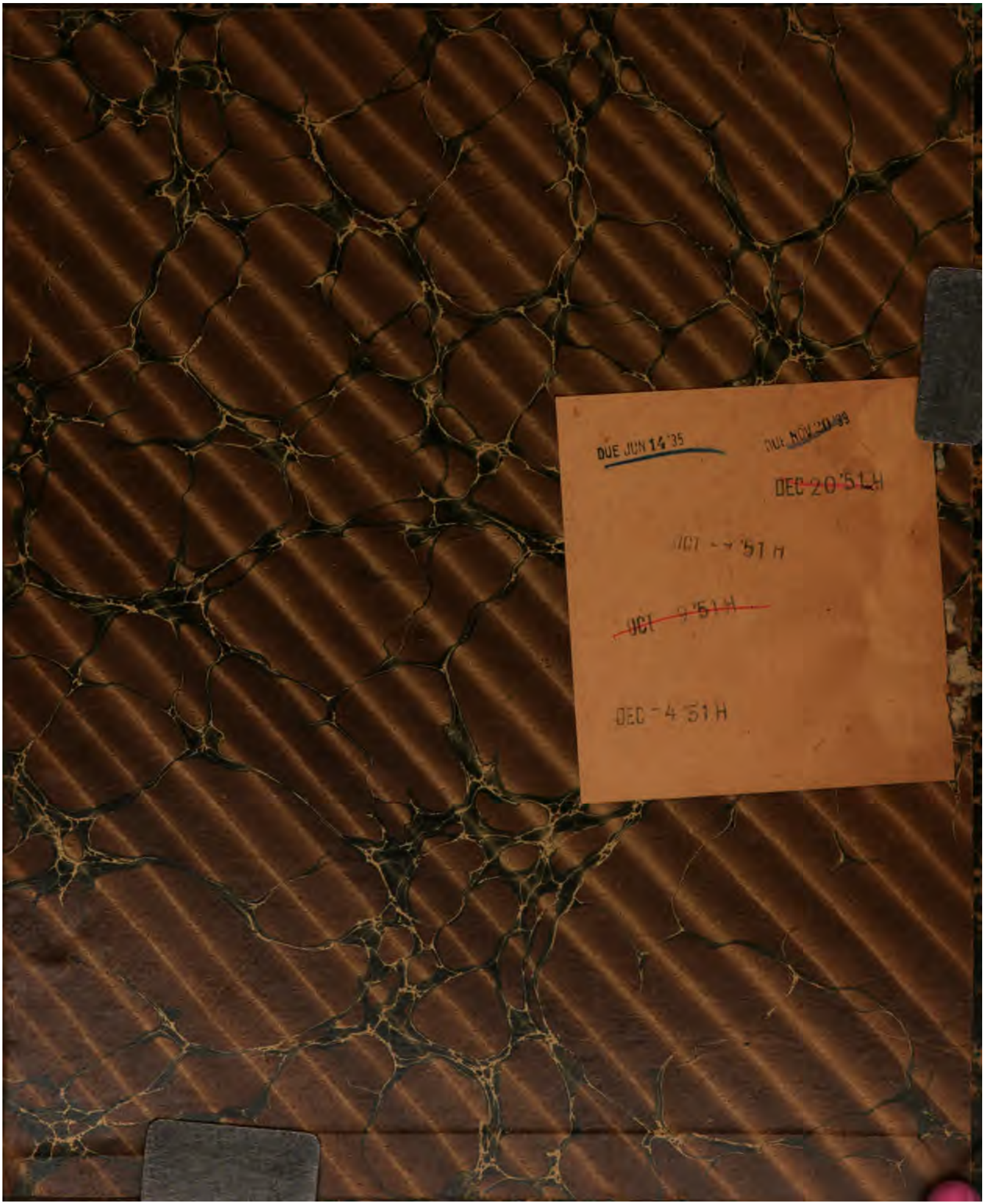
Paris, le 25 octobre 1901,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

31056 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.




DUE JUN 14 '35
DUE NOV 30 '39
DEC 20 '51 H
OCT - 7 '51 H
OCT 9 '51 H
DEC - 4 '51 H

3 2044 102 916 681